Université de Montréal

L'évaluation d'un produit dérivé: une approche discrète

par

Isaac Sabbah

Département de mathématiques et de la statistique, Université de Montréal.

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la faculté des études supérieures en vue de l'obtention du grade de maîtrise en mathématiques.

mars 2006

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

L'évaluation d'un produit dérivé: Une approche discrète

Présenté par

Isaac Sabbah

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Martin Goldstein

président-rapporteur

Richard Duncan

directeur de recherche

Manuel Morales

membre du jury

Résumé

Le présent travail est un modèle simple à temps discret pour évaluer le prix de produits dérivés. Il présente une publication de Cox-Ross-Rubenstein parue en 1979 dans le "Journal of Financial Economics". Les mathématiques utilisées sont de nature simple, mais en cas limite nous obtenons le modèle connu de Black-Scholes, qui n'avait été alors obtenu qu'à l'aide de mathématiques compliquées. Ce travail contient également une généralisation au cas où le titre sous-jacent ne fluctue pas de manière symétrique.

Mots clés: Modèle binomial, Option, Black-Scholes, Arbitrage, Flux de trésorerie, Taux de rendement, Théorème limit central.

Abstract

This paper presents a simple discrete-time model for evaluating options. It presents a paper by Cox-Ross-Rubenstein published in 1979 in the "Journal of Financial Economics". The mathematics used here are very basic, but as a limiting case we obtain the famous Black-Scholes model which has been derived only through the use of complex methods. This paper also contains a generalization to the case where the underlying asset fluctuates in a non-symmetric manner.

Key Words: Binomial model, Option, Black-Scholes, Arbitrage, Cash flow, Rate of return, Central Limit Theorem.

Dédicace. *J'aimerais remercier mon directeur de recherche, M. Richard Duncan, qui, en plus de m'avoir transmis des connaissances indispensables en probabilité et en mesure lors de mes cours gradués, a su me guider avec patience, enthousiasme et fermeté tout au long de cet ouvrage. Ses commentaires constructifs m'ont toujours éclairé, et chacune de nos discussions amplifiait la volonté de chercher qui a toujours résidé en moi. Ce fut un privilège d'avoir M. Duncan comme directeur, et je lui serai toujours reconnaissant.*

J'aimerais également remercier ma femme et mes enfants. Ma femme pour avoir supporté de me voir passer mes nuits isolé dans mon bureau, et mes enfants pour m'avoir gardé réveillé toutes ces nuits. Je leur suis également reconnaissant, chacun à sa manière.

Isaac Sabbah

1 Introduction

La théorie moderne d'évaluation des produits dérivés prend ses bases dans le calcul stochastique et son utilité peut être remarquée dans presque tous les domaines de la finance. Les techniques modernes prennent leur source dans le livre de Charles Castelli [7] (1877) nommé 'The Theory of Options in Stocks and Shares'. Ce livre a initié les investisseurs au monde des options, mais n'avait pas de fondement théorique sur l'évaluation de celles-ci. En 1900, Louis Bachelier[1] (Sorbonne) introduit une première méthode d'évaluation de produits dérivés dans son ouvrage 'Théorie de la spéculation'. Toutefois, sa méthode donnait naissance à des valeurs d'option négatives ou bien excédant la valeur de l'actif sous-jacent. En 1955, Paul Samuelson (MIT), écrit un article, qu'il n'a jamais publié, intitulé 'Brownian Motion in the Stock Market'. Durant cette même année, un des étudiants de Paul Samuelson, Richard Kruizenga, publie l'article 'Put and Call Options: A Theoretical and Market Analysis'. En 1962, A. James Boness[15] développe une méthode beaucoup plus évoluée pour évaluer les options dans son ouvrage 'A Theory and Measurement of Stock Option Value'. C'est cet ouvrage qui a servi de guide à Fischer Black et Myron Scholes[5]. Il a fallu attendre 1973 pour voir une bourse officielle d'options, puis un modèle d'évaluation efficace. Dans la même année, Robert Merton[14] a généralisé ce modèle sous plusieurs aspects. Ces articles ont servi de fondements et de référence à de nombreuses études.

Ces études montrent que l'évaluation des produits dérivés touche pratiquement tous les domaines de la finance. Par exemple, presque tous les titres de placements peuvent être considérés et évalués comme des portefeuilles d'options (d'achat et de vente). En fait la théorie possède des applications dans une grande variété de problèmes économiques.

Les outils mathématiques utilisés dans les articles de Black-Scholes et Merton demandent malheureusement énormément d'expertise et par conséquent nous cachent l'aspect économique du problème. Toutefois, grâce à un ouvrage de William Sharpe[16] (1978), il est possible d'arriver à ces mêmes résultats à l'aide de mathématiques élémentaires.

Dans le présent ouvrage, je compte présenter le modèle d'évaluation d'options simple à temps discrets développé par Cox-Ross-Rubenstein, et les principes économiques d'évaluation d'option par méthodes d'arbitrage sont clairs. Dans les chapitres 2 et 3, je présenterai le modèle de Cox-Ross-Rubenstein[9] pour une option d'achat sur une action ne payant pas de dividendes. Au chapitre 4, j'illustrerai comment réaliser un profit sans risque si le prix du marché diffère de celui prescrit par ce modèle. Au chapitre 5, je présenterai le passage du modèle binomial (approfondi aux chapitres 2 et 3) au modèle continu. Je présenterai comment Cox-Ross-Rubenstein ont montré que le modèle binomial contient le modèle de Black-Scholes en cas limite, et étendrai le modèle de Cox-Ross-Rubenstein au cas où le titre ne fluctue pas de manière symétrique. En prenant la limite d'une autre manière, on obtiendra également le modèle de Cox-Ross[8] (1975).

Il existe cependant des problèmes où l'évaluation de produits dérivés ne peut se réduire à une formule simple. Nous avons donc recours à des méthodes numériques pour évaluer ces options. Michael Brennan et Eduardo Schwartz[6] (1977) ont obtenu plusieurs résultats utilisant ces approches. Mais, ces techniques sont de nature compliquée et ne reflètent pas la structure économique du problème. La formulation du présent modèle mène alternativement à une approche numérique qui est bien plus simple.

Le chapitre 6 contient des méthodes numériques et une généralisation du modèle aux options de vente, et aux options sur des actions rapportant des dividendes. Le chapitre 7 servira de conclusion en montrant comment le modèle peut être généralisé de plusieurs manières et en notant son rôle dans les méthodes d'évaluation par arbitrage.

Définitions

Définition 1.1. Option d'achat: *Une option d'achat ('call option') est un contrat qui donne le droit mais non l'obligation, d'acheter une quantité donnée d'un actif financier (action, indice boursier, devise, matière première, etc.), appelé actif sous-jacent, à un prix défini à l'avance, avant une date donnée.*

Définition 1.2. Option de vente: *Une option de vente ('put option') est un contrat qui donne le droit mais non l'obligation, de vendre une quantité donnée d'un actif sous-jacent, à un prix défini à l'avance, avant une date donnée.*

Définition 1.3. Prix d'exercice: *Le prix d'exercice ('strike price') est le prix convenu par les partis auquel ils transigeraient l'actif sous-jacent durant la période limitée.*

Définition 1.4. Date d'expiration: *La date d'expiration d'une option est la date avant laquelle (ou à laquelle) celle-ci peut être exercée.*

Définition 1.5. Option Américaine: *Une option Américaine est une option qui peut être exercée à tout moment jusqu'à sa date d'expiration.*

Définition 1.6. Option Européenne [1] : *Une option Européenne est une option qui ne peut être exercée qu'à la date d'expiration.*

Définition 1.7. Arbitrage: *L'arbitrage est une opération financière apportant un gain certain sans risque.*

Définition 1.8. Portefeuille: *Un portefeuille est un couple $(B, A) \in \mathbb{R}^2$, où B correspond au montant en actifs sans risque, et A correspond au nombre d'actions. Il est à noter que les variables B et A peuvent prendre des valeurs négatives.*

[1] Dans le présent article, nous ne traiterons que les options Américaines.

2 L'idée de base

Supposons que le prix d'une action est $S = 50\$$, et qu'à la fin d'une certaine période, son prix est : soit $S^* = 25\$$ ou $S^* = 100\$$ [2] . Une option d'achat sur l'action est disponible avec un prix d'exercice $K = 50\$$, et celle-ci expire à la fin de la période. Il est également possible de prêter ou d'emprunter de l'argent à un taux d'intérêt de 25%. La seule information manquante est le prix de l'option, C. Toutefois, s'il est impossible d'avoir de l'arbitrage, l'information donnée est suffisante pour calculer le prix de l'option. Formons un portefeuille de la manière suivante :

1. Émettre (vendre) x options d'achat à C chacune
2. Acheter y actions
3. Emprunter z dollars

Le tableau suivant donne le flux de trésorerie selon chaque possibilité :

		Date d'expiration	
	Présent	$S^* = 25\$$	$S^* = 100\$$
Vente de x options d'achat	Cx	$-$	$-50x$
Achat de y actions	$-50y$	$+25y$	$+100y$
Emprunt de z dollars	$+z$	$-1.25z$	$-1.25z$
Total	$Cx - 50y + z$	$25y - 1.25z$	$-50x + 100y - 1.25z$

Table 1

Analysons la Table 1:

En début de période (Présent), nous émettons x options d'achat à un prix de C chacune, ce qui génère une entrée de fonds de Cx. Ensuite nous achetons y actions à 50\$ chacune, ce qui nous coûte $50y$. Et finalement nous empruntons z, pour une entrée de fonds de z. En somme, le montant disponible en début de période est de $Cx - 50y + z$.

En date d'expiration, il y a deux cas possibles: soit l'action baisse à $S^* = 25\$$, soit elle monte à $S^* = 100\$$.

Si elle baisse à $S^* = 25\$$, personne ne voudra exercer l'option, car le droit d'acheter l'action à 50\$ n'est avantageux que si celle-ci transige à un prix supérieur à 50\$. La vente de nos y actions rapportera $25y$. Nous devons également rembourser l'emprunt de z, qui, à 25% d'intérêt, vaut maintenant $1.25z$. Donc, l'ensemble de nos transactions en fin de période nous laisse avec une somme de $25y - 1.25z$.

[2] On suppose ici qu'il n'y a ni frais de transaction, ni dividendes.

Si l'action monte à $S^* = 100\$$, alors tout le monde voudra exercer son option. Le prix de l'action étant de $S^* = 100\$$, il est avantageux de l'acheter à $K = 50\$$. En fait, tout celui qui possède une option d'achat, l'exercera. Nous devrons donc honorer notre contrat en achetant les actions à $S^* = 100\$$ et en les revendant immédiatement à $K = 50\$$ à tous ceux qui possèdent des options. Ces transactions engendrent des pertes de 50\$ par option pour nous, et donc nous payons $50x$. La vente de nos y actions rapportera $100y$. Nous devons aussi repayer notre emprunt de z, qui maintenant vaut $1.25z$. Donc, l'ensemble de nos transactions en fin de période nous laisse avec une somme de $-50x + 100y - 1.25z$.

Afin de ne pas avoir de possibilité d'arbitrage, il faut que la valeur du portefeuille à la date d'expiration de l'option soit 0, et il faut aussi que la valeur présente du portefeuille soit 0.

Il faut donc que :

$$\begin{aligned} 25y - 1.25z &= 0 \\ -50x + 100y - 1.25z &= 0 \\ Cx - 50y + z &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

En résolvant le système [3] , on obtient que (x, y, z) fait partie de l'espace engendré par $(3, 2, 40)$, et aussi que

$$C = 20\$$$

Si le prix de l'option n'était pas de 20\$, il y aurait possibilité d'effectuer un profit certain sans risque (i.e. Il y aurait possibilité d'arbitrage).

Par exemple, si $C = 25\$$, le portefeuille verrait une affluence de capital de $25x - 50y + z$ au temps initial. Nous réaliserions un profit sans risque de $5x$ s'il n'y a aucun autre gain ou perte de capital à la fin de la période.

Pour être plus spécifique, supposons que nous vendons 3 options d'achat, que nous achetons 2 actions, et que nous empruntons 40\$. La vente des 3 options nous rapporte $3 \cdot 25\$ = 75\$$, l'achat des 2 actions nous coûte 100\$, et l'emprunt de 40\$ nous rapporte 40\$. Nous avons donc $75\$ - 100\$ + 40\$ = 15\$$ en début de période. En fin de période, si $S^* = 25\$$, personne n'exercera son option d'achat, la revente de nos 2 actions nous rapportera 50\$, et pour rembourser le prêt nous débourserons 50\$. L'ensemble des transactions en fin de période (dans le cas où $S^* = 25\$$) nous rapporte donc $50\$ - 50\$ = 0\$$. Si, par contre $S^* = 100\$$, les 3 détenteurs d'options les exerceront et il faudra donc payer 50\$ à chacun, ce qui nous coûtera $3 \cdot 50\$ = 150\$$. La vente de nos 2 actions nous rapportera $2 \cdot 100\$ = 200\$$, et le remboursement du prêt nous coûtera 50\$. L'ensemble des transactions en fin de période (dans le cas où $S^* = 100\$$) nous rapporte donc $-150\$ + 200\$ - 50\$ = 0\$$. Nous avons donc réalisé un profit de 15\$ sans risque (qui correspond en fait au $5x$ calculé ci haut).

Réciproquement, si $C = 15\$$, le même scénario peut se produire en achetant x options d'achat, en vendant à découvert y actions, et en prêtant z dollars.

[3]La résolution de ce système se trouve à l'appendice I.

La ***table 1*** illustre qu'il est possible de simuler l'effet d'une option en achetant des actions et en empruntant de l'argent dans la proportion appropriée.

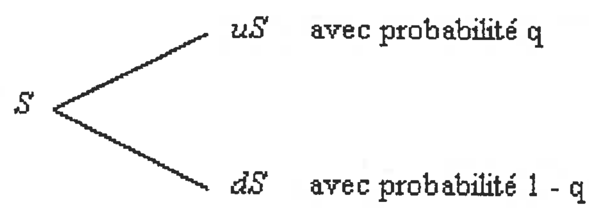
Ceci étant dit, ce qui est remarquable est le fait que pour calculer le prix d'une option, nous n'avons besoin que du prix d'exercice, du prix de l'action, de l'étendue de la fluctuation du prix de l'action et du taux d'intérêt. Ce qui est encore plus surprenant est le fait que le prix de l'option est indépendant de la probabilité que l'action monte ou descende.

Cet exemple est très simple, mais révèle certaines propriétés essentielles de l'évaluation du prix d'option.

3 Modèle binomial d'évaluation du prix d'options

Cette section sera consacrée à développer l'idée de base en une méthode complète d'évaluation du prix d'options. Nous supposons d'abord que le prix de l'action suit un modèle binomial à temps discret. Le taux de rendement de l'action pour une période peut prendre deux valeurs possibles : $u - 1$ avec probabilité q, ou $d - 1$ avec probabilité $1 - q$. Nous poserons $u > 1 > d > 0$ tout au long de l'article. Donc, si le prix actuel de l'action est S, le prix de l'action en fin de période sera de uS ou dS.

Le diagramme [4] suivant illustre la situation.



On suppose également que le taux d'intérêt est constant. Les individus peuvent emprunter et prêter à ce taux autant qu'ils le veulent. Afin de pouvoir se pencher sur l'essence même du problème, nous allons supposer qu'il n'y a ni taxes ni coûts de transaction.

Soit r, un plus le taux d'intérêt $(1 + i)$ au cours d'une période. On exige que $u > r > d$, car si ces inégalités ne sont pas respectées, il y a possibilité de réaliser un profit sans risque. Par exemple, si $u > d > r$, il suffirait d'emprunter S, acheter une action, la revendre en fin de période à dS ou uS, puis rembourser rS au prêteur. Nous gagnons ainsi $dS - rS$ ou $uS - rS$ sans risque. Réciproquement, si $r > u > d$, il suffirait de prêter S, vendre une action, la racheter en fin de période à dS ou uS, puis récupérer rS de l'emprunteur. Nous gagnons ainsi $rS - dS$ ou $rS - uS$ sans risque.

Afin d'évaluer une option d'achat sur cette action, commençons par le cas où la date d'expiration est une période plus loin. Soit C le prix actuel de l'option, C_u le prix de l'option à la fin de la période si le prix de l'action est de uS, et C_d le prix de l'option à la fin de la période si le prix de l'action est de dS. Puisqu'il ne reste qu'une seule période dans la vie de l'option, $C_u = \max[0, uS - K]$ et $C_d = \max[0, dS - K]$ où K représente toujours le prix d'exercice.

[4] Ceci peut s'écrire $P[S^* = uS] = q$ et $P[S^* = dS] = 1 - q$

Donc,

$$C \begin{cases} C_u = \max[0, uS - K] & \textbf{avec probabilité q} \\ C_d = \max[0, dS - K] & \textbf{avec probabilité 1 - q} \end{cases}$$

Formons un portefeuille ayant A actions et un montant B en obligations. (Acheter des obligations est équivalent à prêter de l'argent, et vendre des obligations est équivalent à emprunter). Ce portefeuille coûte $AS + B$. À la fin de la période, la valeur du portefeuille est illustrée dans la table suivante:

$$AS + B \begin{cases} AuS + rB & \textbf{avec probabilité q} \\ AdS + rB & \textbf{avec probabilité 1 - q} \end{cases}$$

Puisque A et B peuvent être sélectionnés arbitrairement, choisissons les de manière à ce que la valeur du portefeuille à la fin de la période soit égale au prix de l'option (à la fin de la période). Nous voulons donc que

$$\begin{aligned} AuS + rB &= C_u \\ AdS + rB &= C_d \end{aligned}$$

En résolvant le système, on obtient

$$A = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S} \quad \text{et} \quad B = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r}. \tag{3.1}$$

Un portefeuille ayant A et B choisis de cette manière, s'appelle un **portefeuille couvert** (B, A).

Si la valeur de ce portefeuille excède le prix actuel de l'option d'achat, il est possible de réaliser un profit sans risque en achetant l'option et en vendant le portefeuille. En d'autres mots, si $AS + B > C$, alors nous pouvons acheter une option à C, et vendre le portefeuille à $AS + B$. Nous encaissons ainsi $AS + B - C > 0$ en début de période. En fin de période, nous vendons l'option à C_d et achetons le portefeuille à $AdS + rB$ si le prix de l'action est dS, et nous vendons l'option à C_u et achetons le portefeuille à $AuS + rB$ si le prix de l'action est uS. Dans les deux cas, le flux de trésorerie en fin de période est de 0. Nous avons donc réalisé un profit certain de $AS + B - C$.

Il est également possible de réaliser un profit sans risque dans le cas contraire (si le prix de l'option excède celui du portefeuille) en effectuant les opérations opposées. Mais ce profit n'est réalisable que si on ne considère pas le fait que celui qui a acheté l'option peut l'exercer immédiatement.

Supposons que $AS + B < S - K$. Si nous essayons de réaliser un profit sans risque en vendant les options d'achat à un prix supérieur à $AS + B$ mais inférieur à $S - K$, il est facile de réaliser que nous sommes la source de profits plutôt que d'en être les bénéficiaires. N'importe qui peut réaliser un profit en achetant nos options d'achat et en les exerçant immédiatement.

Il est donc nécessaire, afin qu'il n'y ait pas d'opération d'arbitrage possible, que $C = AS + B$, et $C \geq S - K$. Si $C < S - K$, alors n'importe qui peut acheter une option à C, acheter une action à K (en exerçant l'option), puis vendre l'action immédiatement à S. L'investisseur réalise ainsi un profit sans risque de $-C - K + S$ (qui est positif).

Alors, il faut que

$$C = AS + B,$$

ce qui équivaut à

$$C = \frac{C_u - C_d}{u - d} + \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r},$$

et donc,

$$C = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{r-d}{u-d}\right)C_u + \left(\frac{u-r}{u-d}\right)C_d\right]. \tag{3.2}$$

si cette valeur est supérieure à $S - K$, et $C = S - K$ sinon.

Si on définit $p = \frac{r-d}{u-d}$, alors $1 - p = \frac{u-r}{u-d}$. L'équation (3.2) peut s'écrire de la manière suivante:

$$C = \frac{1}{r}[pC_u + (1-p)C_d] \tag{3.3}$$

Montrons que cette valeur sera toujours supérieure à $S - K$ (tant que le taux d'intérêt est supérieur à zéro). Afin de ne pas s'attarder sur les situations moins importantes, où le taux d'intérêt est inférieur ou égal à zéro, nous allons supposer dorénavant que r est toujours supérieur à un.

- Si $uS \leq K$, alors $S < K$ et $C = 0$, donc $C > S - K$.

- Si $dS \geq K$, alors $S > K$.

Dans ce cas, $C_u = \max[0, uS - K] = uS - K$ et $C_d = \max[0, dS - K] = dS - K$. Mais puisque

$$C = \frac{C_u - C_d}{u - d} + \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r},$$

alors, en remplaçant C_u et C_d par leurs expressions respectives, on obtient

$$C = \frac{(uS - K) - (dS - K)}{u - d} + \frac{u\,(dS - K) - d\,(uS - K)}{(u-d)r},$$

ce qui implique que

$$C = S - \frac{K}{r}$$

qui est supérieur à $S - K$ car $r > 1$. On a donc $C > S - K$.

- Si $uS > K > dS$,

Dans ce cas, $C_u = uS - K$ et $C_d = 0$. Puisque

$$C = \frac{C_u - C_d}{u - d} + \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r},$$

alors,

$$C = \frac{(uS - K) - 0}{u - d} + \frac{u\,(0) - d\,(uS - K)}{(u-d)r},$$

ce qui implique que

$$C = \frac{p(uS - K)}{r}.$$

Nous voulons donc montrer que $\frac{p(uS-K)}{r} > S - K$.

Or,

$$\frac{p(uS - K)}{r} > S - K$$

est équivalent à

$$\frac{p(uS - dS + dS - K)}{r} > S - K,$$

qui est à son tour équivalent à

$$\frac{p(u-d)S + p(dS - K)}{r} - S + K > 0.$$

Et donc, pour que

$$\frac{(r-d)S + p(dS-K) - rS + rK}{r} > 0,$$

il faut que

$$rS - dS + pdS - pK - rS + rK > 0,$$

et

$$(p-1)dS + (r-p)K > 0.$$

On déduit donc qu'il faut que

$$(r-p)K > (1-p)dS.$$

Or ceci est vrai, car $r > 1$ et $K > dS$. Donc $C > S - K$.

Nous avons donc trouvé en (3.3) la formule permettant de calculer la valeur d'une option d'achat une période avant sa date d'expiration en fonction de S, K, u, d et r. Il est important, toutefois, de noter quelques propriétés de l'équation (3.3).

Premièrement, la probabilité q n'apparaît pas dans l'équation. Cela veut dire que même si différents investisseurs ont des différentes probabilités au sujet du mouvement de l'action vers le haut ou vers le bas, ils s'entendent tous au sujet de la relation qui existe entre C et S, u, d et r.

Deuxièmement, la valeur de l'option d'achat est indépendante de l'attitude que prend l'investisseur face au risque. Cette formule a été créée sur la seule supposition que l'investisseur préfère avoir plus d'argent, et donc profite de toute situation possible où il peut réaliser un profit.

Troisièmement, le prix de l'action est la seule variable aléatoire sur laquelle dépend le prix de l'option d'achat. Celui-ci ne dépend pas du cours de l'économie, ni du prix d'un autre portefeuille.

Finalement, remarquons que $p = \frac{r-d}{u-d}$ est compris entre zéro et un, et donc possède les propriétés d'une mesure de probabilité. En fait, p est la valeur que q aurait pris si le marché était équilibré et les investisseurs n'étaient pas affectés par le risque.

Afin de remarquer cela, calculons l'espérance de S.

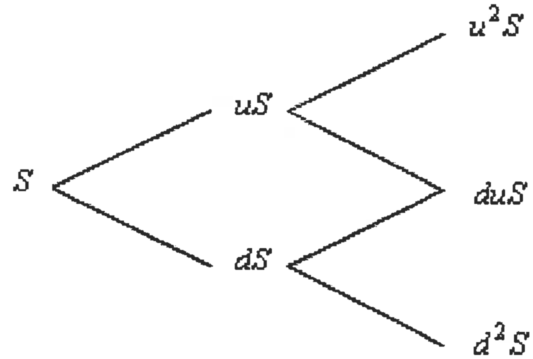
$E[S] = q(uS) + (1-q)(dS) = rS$ et $q = \frac{r-d}{u-d} = p$

On voit donc que le prix de l'option d'achat peut être interprété comme l'espérance de sa valeur future actualisée dans un monde sans risque. Cela n'est pas surprenant puisque nos formules n'incluent ni q, ni aucune mesure de risque.

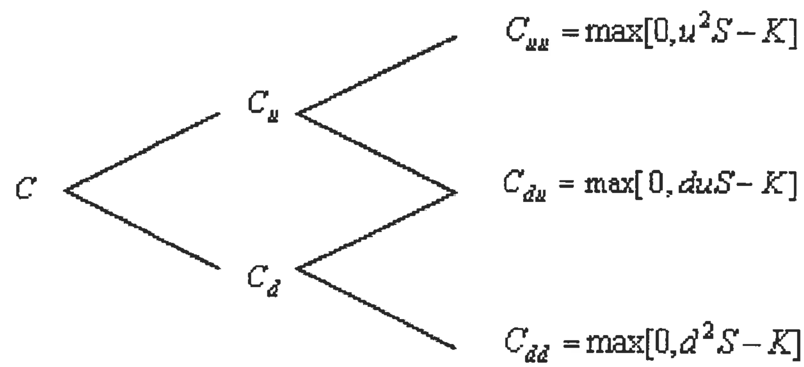
Notons que le taux de rendement sur l'option à l'équilibre n'est pas nécessairement le taux d'intérêt sans risque. En fait, à l'équilibre, détenir une option d'achat pour une période équivaut à détenir le portefeuille couvert pour cette même période. Donc le taux de rendement de l'option d'achat doit être le même que celui du portefeuille couvert.

Évidemment, si l'option d'achat n'est pas évaluée correctement, le taux de rendement de l'option sera différent de celui du portefeuille couvert.

Considérons maintenant une option avec deux périodes avant la date d'expiration. L'action peut prendre trois valeurs différentes après deux périodes,



Parallèlement, pour l'option d'achat on a,



C_{uu} représente la valeur de l'option d'achat dans deux périodes si la valeur de l'action augmente au cours des deux périodes. C_{du} et C_{dd} ont des définitions analogues.

À la fin de la première période, il ne restera qu'une seule période dans la vie de l'option d'achat. Nous faisons donc face à un problème identique à celui que nous venons de résoudre.

On a donc,

$$C_u = \frac{1}{r}[pC_{\mathrm{uu}} + (1-p)C_{\mathrm{ud}}]$$

$$\text{et} \tag{3.4}$$

$$C_d = \frac{1}{r}[pC_{\mathrm{du}} + (1-p)C_{\mathrm{dd}}]$$

Nous pouvons encore créer un portefeuille avec AS en actions et B en obligations de manière à ce que la valeur du portefeuille en fin de période soit C_u si le prix de l'action est uS, et C_d si le prix de l'action est dS.

Afin de trouver les valeurs de A et B, on utilise l'équation (3.1) en remplaçant C_u et C_d par leurs expressions respectives.

Nous pouvons encore affirmer qu'un profit sans risque est réalisable si le prix de l'option d'achat diffère de la valeur du portefeuille (ou de $S-K$, si cette valeur est plus élevée). Il y a toutefois une nuance importante. À une période de la date d'échéance de l'option, nous pouvons réaliser un profit sans risque en vendant l'option et en achetant le portefeuille couvert si celui-ci possède une valeur inférieure à celle de l'option. La première des deux périodes s'étant écoulée, nous savons que la valeur de l'option et la valeur du portefeuille couvert doivent être égales, et donc nous aurions pu liquider notre position à ce moment sans risque. Mais cela n'est vrai que si l'option arrive à échéance à la fin d'une période. À la fin de la première période, il reste encore une période avant l'échéance de l'option et celle-ci peut être en déséquilibre. En liquidant notre position, nous pouvons réaliser une perte en deuxième période supérieure au profit réalisé au cours de la première période.

On déduit que même avec deux périodes avant la date d'expiration, il y a des possibilités d'arbitrage si le prix de l'option diffère de $\max(AS+B, S-K)$. Donc, $\max(AS+B, S-K) = C$.

Puisque A et B ont la même forme pour chaque période, la valeur de l'option en termes de C_u et C_d est $C = \max(\frac{1}{r}[pC_u + (1-p)C_d], S-K)$.

En remplaçant les expressions obtenues en (3.4) dans cette dernière équation, et en notant que $C_{ud} = C_{du}$, on obtient

$$C = \frac{1}{r^2}[p^2 C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2 C_{dd}],$$

qui est équivalent à

$$C = \frac{1}{r^2}[p^2 \max[0, u^2S-K] + 2p(1-p)\max[0, udS-K] + (1-p)^2 \max[0, d^2S-K]]. \quad (3.5)$$

Montrons que cette expression est toujours supérieure à $S-K$ lorsque $r > 1$, et donc elle donne exactement la valeur de l'option.

Nous avons déjà montré que, dans le cas d'une période, $C > S-K$. Par un raisonnement analogue, il est clair que $C_u > uS-K$ et $C_d > dS-K$.

Nous partons donc de la formule (3.3) qui dit que

$$C = \frac{1}{r}[pC_u + (1-p)C_d].$$

Puisque $C_u > uS-K$ et $C_d > dS-K$, on a

$$C > \frac{1}{r}[p(uS-K) + (1-p)(dS-K)],$$

qui se réduit à

$$C > \frac{pu + (1-p)\,d}{r} S - \frac{K}{r} = S - \frac{K}{r} > S - K$$

car $pu + (1-p)\,d = r$ et $r > 1$.

Nous pouvons maintenant étendre la formule (3.5), qui représente le prix d'une option dont le nombre de périodes avant la date d'expiration est 2, à une formule plus générale représentant le prix d'une option dont le nombre de périodes avant la date d'expiration est n.

Proposition 3.1. *La forme générale du prix d'une option, n périodes avant la date d'expiration, est*

$$C(n) = \frac{1}{r^n} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \max[0, u^j d^{n-j} S - K] \tag{3.6}$$

Preuve. Montrons par induction que $C(n) = \frac{1}{r^n} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \max[0, u^j d^{n-j} S - K]$ où $C(n)$ est le prix de l'option n périodes avant la date d'expiration.

Premièrement, vérifions que la formule est vraie dans le cas $n = 1$.

Si $n = 1$, alors

$$C(1) = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{1} \left(\frac{1!}{j!(1-j)!} \right) p^j (1-p)^{1-j} \max[0, u^j d^{1-j} S - K]$$

et donc

$$C(1) = \frac{1}{r} \left[p\max[0, uS - K] + (1-p)\max[0, dS - K] \right]$$

qui est équivalent à

$$C(1) = \frac{1}{r} [pC_u + (1-p)C_d]$$

qui correspond à l'équation (3.3). Donc l'équation (3.6) est vraie dans le cas $n = 1$.

Supposons maintenant que la formule est vraie dans le cas $n = k$, montrons qu'elle est vraie pour $n = k + 1$.

Nous supposons donc que $C(k) = \frac{1}{r^k} \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{k!}{j!(k-j)!} \right) p^j (1-p)^{k-j} \max[0, u^j d^{k-j} S - K]$ est vraie, montrons que $C(k+1) = \frac{1}{r^{k+1}} \sum_{j=0}^{k+1} \left(\frac{(k+1)!}{j!(k+1-j)!} \right) p^j (1-p)^{k+1-j} \max[0, u^j d^{k+1-j} S - K]$.

Si $n = k+1$, alors il nous reste $k+1$ périodes avant la date d'expiration. Si le prix de l'action après $k+1$ périodes est $u^j d^{k+1-j} S$, alors la valeur de l'option après $k+1$ périodes sera $C_{u^j d^{k+1-j}} = \max[0, u^j d^{k+1-j} S - K] \ \forall\, j = 0, 1, ..., k+1$.

Or, la valeur de l'option après k périodes (i.e. lorsqu'il ne reste qu'une seule période avant la date d'expiration) est

$$C_{u^j d^{k-j}}(1) = \tfrac{1}{r}[pC_{u^{j+1}d^{k-j}} + (1-p)C_{u^j d^{k-j+1}}] \ \forall\, j = 0, 1, ..., k+1.$$

En utilisant l'hypothèse d'induction qui dit que $C(k) = \frac{1}{r^k}\sum\limits_{j=0}^{k}\left(\frac{k!}{j!(k-j)!}\right)p^j(1-p)^{k-j}C_{u^j d^{k-j}}$, on a

$$C(k+1) = \tfrac{1}{r^k}\sum_{j=0}^{k}\left(\tfrac{k!}{j!(k-j)!}\right)p^j(1-p)^{k-j}C_{u^j d^{k-j}}(1),$$

et donc

$$C(k+1) = \tfrac{1}{r^k}\sum_{j=0}^{k}\left(\tfrac{k!}{j!(k-j)!}\right)p^j(1-p)^{k-j}\tfrac{1}{r}\left[pC_{u^{j+1}d^{k-j}} + (1-p)C_{u^j d^{k-j+1}}\right],$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$C(k+1) = \tfrac{1}{r^{k+1}}\sum_{j=0}^{k}\left(\tfrac{k!}{j!(k-j)!}\right)p^{j+1}(1-p)^{k-j}C_{u^{j+1}d^{k-j}}$$

$$+\tfrac{1}{r^{k+1}}\sum_{j=0}^{k}\left(\tfrac{k!}{j!(k-j)!}\right)p^j(1-p)^{k-j+1}C_{u^j d^{k-j+1}}.$$

Faisons le changement de variable $m = j+1$ dans la première sommation. L'équation ci-dessus devient alors

$$C(k+1) = \tfrac{1}{r^{k+1}}\sum_{m=1}^{k+1}\left(\tfrac{k!}{(m-1)!(k-m+1)!}\right)p^m(1-p)^{k-m+1}C_{u^m d^{k-m+1}}$$

$$+\tfrac{1}{r^{k+1}}\sum_{j=0}^{k}\left(\tfrac{k!}{j!(k-j)!}\right)p^j(1-p)^{k-j+1}C_{u^j d^{k-j+1}}\ .$$

On extrait maintenant le dernier terme et le premier terme des deux sommations respectivement, et on obtient

$$C(k+1) = \tfrac{1}{r^{k+1}}\sum_{m=1}^{k}\left(\tfrac{k!}{(m-1)!(k-m+1)!}\right)p^m(1-p)^{k-m+1}C_{u^m d^{k-m+1}} + \tfrac{1}{r^{k+1}}p^{k+1}C_{u^{k+1}d^0}$$

$$+\tfrac{1}{r^{k+1}}(1-p)^{k+1}C_{u^0 d^{k+1}} + \tfrac{1}{r^{k+1}}\sum_{j=1}^{k}\left(\tfrac{k!}{j!(k-j)!}\right)p^j(1-p)^{k-j+1}C_{u^j d^{k-j+1}}.$$

On a donc

$$C(k+1) = \frac{1}{r^{k+1}}(1-p)^{k+1}C_{u^0d^{k+1}} + \frac{1}{r^{k+1}}\sum_{j=1}^{k}\left[\left(\frac{k!}{j!(k-j)!}\right) + \left(\frac{k!}{(j-1)!(k-j+1)!}\right)\right]p^j(1-p)^{k-j+1}C_{u^jd^{k-j+1}}$$

$$+\frac{1}{r^{k+1}}p^{k+1}C_{u^{k+1}d^0},$$

qui équivaut à

$$C(k+1) = \frac{1}{r^{k+1}}(1-p)^{k+1}C_{u^0d^{k+1}} + \frac{1}{r^{k+1}}\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{(k+1)!}{j!(k+1-j)!}\right)p^j(1-p)^{k-j+1}C_{u^jd^{k-j+1}} + \frac{1}{r^{k+1}}p^{k+1}C_{u^{k+1}d^0},$$

et donc

$$C(k+1) = \frac{1}{r^{k+1}}\sum_{j=0}^{k+1}\left(\frac{(k+1)!}{j!(k+1-j)!}\right)p^j(1-p)^{k-j+1}C_{u^jd^{k-j+1}}.$$

Nous avons ainsi prouvé que la forme générale du prix d'une option, n périodes avant la date d'expiration, est

$$C\ (n) = \frac{1}{r^n}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right)p^j(1-p)^{n-j}\max[0, u^jd^{n-j}S-K].$$

□

Il est toutefois possible de représenter cette formule de manière plus élégante.

Soit a le nombre minimal d'incréments positifs que l'action doit subir au cours des n prochaines périodes afin que la valeur finale de l'option soit non nulle. Il faut donc que a soit le plus petit entier non négatif tel que $u^ad^{n-a}S > K$.

Or,

$$u^ad^{n-a}S > K$$

équivaut à

$$a\log u + (n-a)\log d + \log S > \log K,$$

donc

$$a(\log u - \log d) + n\log d + \log S > \log K,$$

et

$$a > \frac{\log\left(\frac{K}{S\,d^n}\right)}{\log\left(\frac{u}{d}\right)}.$$

Il suffit donc que $a > \frac{\log\left(\frac{K}{S\,d^n}\right)}{\log\left(\frac{u}{d}\right)}$.

Pour $j < a$,

$$\max[0, u^j d^{n-j} S - K] = 0,$$

et pour $j \geq a$,

$$\max[0, u^j d^{n-j} S - K] = u^j d^{n-j} S - K.$$

Donc,

$$C = \frac{1}{r^n} \left[\sum_{j=a}^{n} \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} [u^j d^{n-j} S - K] \right].$$

Évidemment, si $a > n$, le prix de l'option doit être 0.

Nous pouvons exprimer C de la manière suivante:

$$C = S \left[\sum_{j=a}^{n} \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \left(\frac{u^j d^{n-j}}{r^n} \right) \right] - \mathrm{Kr}^{-n} \left[\sum_{j=a}^{n} \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} \right].$$

Le deuxième terme de cette expression contient une distribution binomiale complémentaire de paramètres n et p.

$$\phi[a; n, p] = \sum_{j=a}^{n} \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} = 1 - \sum_{j=0}^{a-1} \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p^j (1-p)^{n-j} = 1 - P(\mathrm{Bin}[n,p] < a).$$

Le premier terme contient également une distribution binomiale complémentaire, mais de paramètres n et p' où

$$p' := \left(\tfrac{u}{r}\right) \cdot p \quad \text{ et } \quad 1 - p' := \left(\tfrac{d}{r}\right) \cdot (1-p).$$

$$\phi[a; n, p'] = \sum_{j=a}^{n} \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p'^j (1-p')^{n-j} = 1 - \sum_{j=0}^{a-1} \left(\frac{n!}{j!(n-j)!} \right) p'^j (1-p')^{n-j} = 1 - P(\mathrm{Bin}[n,p'] < a).$$

p' est bien une mesure de probabilité puisque $0 < p' < 1$. Remarquons aussi que

$$p^j (1-p)^{n-j} \left(\frac{u^j d^{n-j}}{r^n} \right) = \left[\frac{u}{r} p \right]^j \left[\frac{d}{r} (1-p) \right]^{n-j} = p'^j (1-p')^{n-j}.$$

On a donc,

Formule Binomiale du Prix d'Option

$C = S\phi[a; n, p'] - Kr^{-n}\phi[a; n, p]$
où
$p := \frac{r-d}{u-d}$ et $p' := \left(\frac{u}{r}\right) \cdot p$,
et
$a :=$plus petit entier non négatif supérieur à $\frac{\log\left(\frac{K}{Sd^n}\right)}{\log\left(\frac{u}{d}\right)}$.
Si $a > n$, alors $C = 0$.

Nous avons donc généralisé la méthode d'évaluation de l'option d'une période à n périodes. Toutes les observations faites pour le cas d'une période sont valables pour le cas de n périodes. En fait, la valeur de l'option devrait être égale à l'espérance de la valeur actualisée du gain perçu à l'échéance. C'est exactement ce que dit l'équation (3.6). Pourquoi donc se compliquer la vie à utiliser une méthode récursive s'il est possible de trouver la réponse en une seule étape? La réponse est simple. La méthode directe (une seule étape) est juste sur le plan technique, toutefois elle n'est utile que si on connaît d'avance les circonstances qui inciteraient un investisseur rationnel à exercer son option avant la date d'expiration. N'ayant pas cette donnée, il nous est impossible de calculer cette espérance.

Il existe une interprétation différente à notre approche binomiale. Supposons que π_u et π_d sont les taux d'escompte relatifs aux états u et d, respectivement. Alors, π_u est la valeur présente de un dollar reçu en fin de période si et seulement si l'état u se produit. Chaque produit financier - une obligation, une action, une option - doit avoir un gain escompté par π_u et π_d s'il n'existe pas de possibilité d'arbitrage. Donc,

$$\begin{aligned} 1 &= \pi_u r + \pi_d r \\ S &= \pi_u(uS) + \pi_d(dS) \\ C &= \pi_u C_u + \pi_d C_d \end{aligned}$$

Les deux premières équations, pour l'obligation et l'action, impliquent que $\pi_u = \left(\frac{r-d}{u-d}\right)\frac{1}{r}$ et $\pi_d = \left(\frac{u-r}{u-d}\right)\frac{1}{r}$. Et en remplaçant ces valeur dans la troisième équation, on obtient l'équation (3.3).

Il est important de noter que nous n'avons pas supposé que l'obligation, l'action et l'option sont les seuls titres dans notre économie, mais plutôt qu'afin d'être évalués par rapport à un marché équilibré, ils doivent satisfaire aux relations ci haut énoncées.

4 Stratégies sans risque

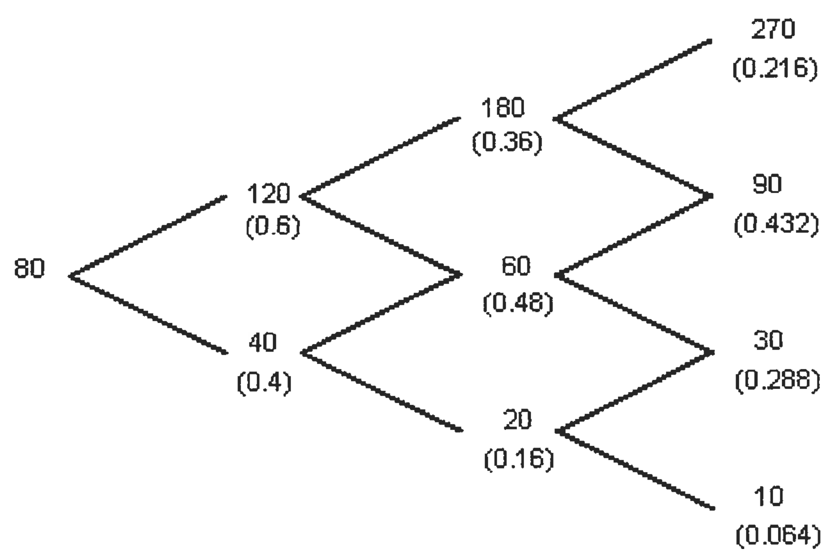
L'exemple numérique suivant illustre comment utiliser la formule pour réaliser un profit si le prix du marché M de l'option diffère de la valeur théorique C. Supposons que les valeurs des variables sont

$$S = 80,\ n = 3,\ K = 80,\ u = 1.5,\ d = 0.5,\ r = 1.1.$$

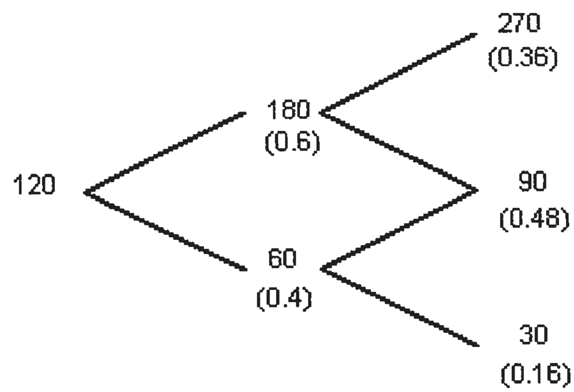
Nous avons donc une action dont le prix en début de période est $S = 80$. À la fin de chaque période, le prix de l'action est soit de 1.5 fois son prix à la période précédente, ou bien de 0.5 fois son prix à la période précédente. Le taux d'intérêt est de 10% par période. Une option d'achat est émise avec prix d'exercice de $K = 80$, et date d'expiration dans $n = 3$ périodes.

Dans ce cas, $p = \frac{(r-d)}{(u-d)} = 0.6$, et $r^{-1} = 0.909, r^{-2} = 0.826,\ r^{-3} = 0.751$

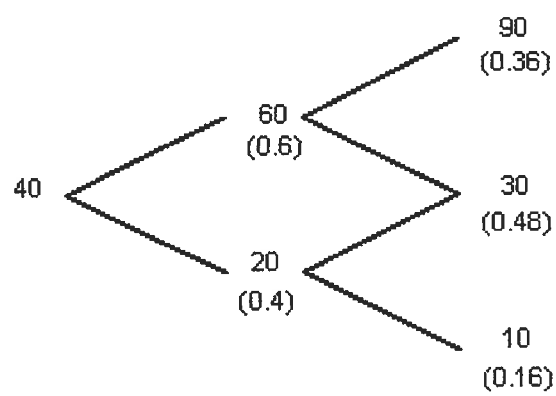
Les diagrammes suivants représentent les différents prix que peut prendre l'action ainsi que les probabilités correspondantes lorsque:
$n = 3$, et $S = 80$.



$n = 2$, et $S = 120$.



$n = 2$, et $S = 40$.

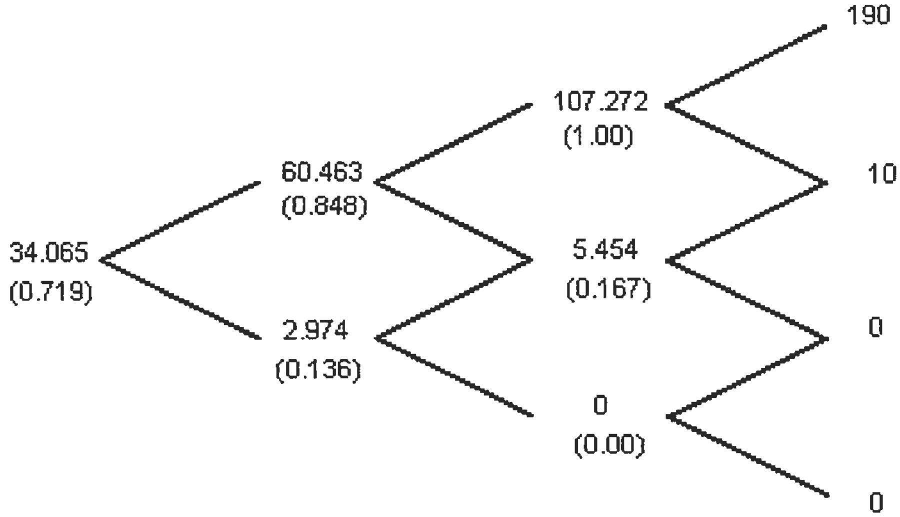


En utilisant la formule pour évaluer l'option, on obtient:

$$\begin{aligned} C &= [0.064(0) + 0.288(0) + 0.432(90 - 80) + 0.216(270 - 80)]/(1.1)^3 \\ &= 34.0796 \end{aligned}$$

On se souvient qu'afin de former un portefeuille couvert, pour chaque option d'achat vendue, nous devons former puis ajuster un portefeuille contenant AS en actions puis B en obligations, où $A = \frac{(C_u - C_d)}{(u-d)S}$.

Le diagramme suivant représente les valeurs que peut prendre l'option d'achat ainsi que les valeurs de A correspondantes.



Nous sommes maintenant prêts, à l'aide de notre formule, à bénéficier de toute situation où le prix de l'option diffère de 34.065. Supposons que lorsque $n = 3$ (i.e. lorsqu'il reste 3 périodes avant la date d'expiration de l'option), l'option d'achat est évaluée à 36. L'option est surévaluée, et donc nous voulons bénéficier de cet écart en la vendant. Voici les étapes à suivre:

Etape 1 ($n = 3$): Vendre l'option à 36. Prendre 34.065 de ces 36 et les investir dans un portefeuille contenant $A = 0.719$ actions en empruntant $0.719(80) - 34.065 = 23.455$. Investir le restant $36 - 34.065 = 1.935$ à la banque.

Etape 2 ($n = 2$): Supposons que l'action monte à 120 et donc $A = 0.848$. Il suffit donc d'acheter $0.848 - 0.719 = 0.129$ actions à 120 pour un coût total de 15.480, et emprunter pour payer ce montant. Puisque le taux d'intérêt est de 0.1, on doit déjà un montant de $23.455(1.1) = 25.801$. Notre endettement total à ce stade est donc de $25.801 + 15.480 = 41.281$.

Etape 3 ($n = 1$): Supposons maintenant que l'action tombe à 60. Le nouveau A est 0.167. Il faut donc vendre $0.848 - 0.167 = 0.681$ actions à 60, encaissant ainsi $0.681(60) = 40.860$, et utiliser cet argent pour repayer une partie de la dette. Puisque nous devons maintenant $41.281(1.1) = 45.409$, notre dette est maintenant réduite à $45.409 - 40.860 = 4.549$.

Etape 4d ($n = 0$): Supposons maintenant que l'action tombe à 30. L'action vendue ne vaut plus rien. Nous possédons 0.167 actions qui valent 30 chaque, pour une valeur totale de $0.167(30) = 5$. Nous vendons l'action et repayons les $4.549(1.1) = 5$ que nous devons, et on retire l'argent initialement investi à la banque qui vaut maintenant$1.935(1.1)^3 = 2.575$

Etape 4u ($n = 0$): Supposons finalement que l'action monte à 90. L'option vendue ne vaut que 10. Emprunter 10 pour payer cette dette. Nous devons donc $5 + 10 = 15$. Nous possédons 0.167 actions qui valent 90 chaque, pour une valeur totale de $0.167(90) = 15$. Nous vendons donc nos actions (0.167) pour repayer notre dette, et on retire notre argent initialement investi à la banque qui vaut maintenant $1.935(1.1)^3 = 2.575$.

Le tableau suivant illustre la suite de transactions à effectuer afin de s'assurer d'un profit sans risque.

Périodes restantes	**Transactions**	**Flux de trésorerie**
$n = 3,\ S = 80$	Achat de 0.719 actions à 80	-57.52
	Vente d'une option d'achat à 36	36
	Emprunt de 23.455	23.455
$n = 2,\ S = 120$	Achat de 0.129 actions à 120	-15.48
	Emprunt de 15.48	15.48
$n = 1,\ S = 60$	Vente de 0.681 actions à 60	40.86
	Remboursement de 40.86	-40.86
$n = 0,\ S = 30$	Vente de 0.167 actions à 30	5
	Remboursement de 5	-5
$n = 0,\ S = 90$	Paiement de 10 sur l'option	-10
	Emprunt de 10	10

Actifs

Si $S = 30$, alors on possède $(-57.52 + 36 + 23.455)(1.1)^3 + (-15.48 + 15.48)(1.1)^2 + (40.86 - 40.86)(1.1) + (5 - 5) = +\mathbf{2.575}$

Si $S = 90$, alors on possède $(-57.52 + 36 + 23.455)(1.1)^3 + (-15.48 + 15.48)(1.1)^2 + (40.86 - 40.86)(1.1) + (10 - 10) = +\mathbf{2.575}$

Nous remarquons donc, que si nous appliquons notre formule, la différence entre le prix du marché de l'option et sa valeur théorique (évaluée à l'aide de notre formule) peut être conservée jusqu'à l'échéance de celle-ci tout en accumulant les intérêts, générant ainsi un profit sans risque. Il est vrai qu'en liquidant notre position avant la date d'expiration nous pouvons générer une perte qui viendrait ruiner nos profits, mais cette perte peut être évitée en conservant notre position jusqu'à la date d'expiration. Il est cependant possible que le prix du marché coïncide avec notre formule. Dans ce cas, nous pouvons liquider notre position sans perte, évitant ainsi le tracas de conserver notre portefeuille équilibré.

Et si l'acheteur de notre option décide de l'exercer à un temps inattendu, empirerait-il notre situation et/ou la sienne? La réponse est non. Toute erreur de sa part ne peut être que bénéfique pour nous. Supposons qu'il décide d'exercer l'option trop tôt. Dans ce cas, le portefeuille couvert aura toujours une valeur supérieure à $S-K$, et donc nous pouvons liquider notre position avec un profit. Supposons maintenant qu'il n'exerce pas l'option au moment optimal. Il n'y a là encore aucun problème. Au moment optimal, le portefeuille couvert vaut $S-K$. S'il avait exercé l'option, ce serait exactement suffisant pour honorer notre obligation et liquider notre position. Or, puisqu'il ne l'a pas exercée, l'option sera conservée pour au moins une autre période, nous calculons donc C_u, C_d et $AS+B$ qui a maintenant une valeur ajustée en conséquence. Mais maintenant, $AS+B < S-K$, et donc nous pouvons soutirer et maintenir des profits sans risque. Nous remarquons donc que tout fonctionne parfaitement, quoi que fasse l'acheteur de l'option. En fait, plus il fait d'erreurs, plus de profit on réalise.

Lors de notre opération de couverture, l'important était de maintenir la relation de proportionnalité appropriée: pour chaque option que nous émettons, détenir A actions et B en obligations dans notre portefeuille couvert. Nous appelleront dorénavant le rapport du nombre d'actions dans notre portefeuille au nombre d'options émises: le *rapport de couverture*. Dans notre exemple, nous avons maintenu le nombre d'options constant, et avons ajusté notre portefeuille couvert en achetant ou vendant des actions et des obligations. Par conséquent, notre profit était indépendant de l'évolution du prix de l'option entre le début de nos transactions et la date d'expiration.

Si, par contre, nous avions maintenu le nombre d'actions constant et ajusté le nombre d'options et nos actifs en obligations, cela aurait risqué. Supposons qu'à un moment donné il avait fallu augmenter le rapport de couverture. Cela peut être accompli de deux manières : (1) acheter plus d'actions, ou (2) racheter quelques options.

Si nous achetons des actions, il n'y a aucun problème. Toutefois, si on décide d'ajuster le nombre d'options, nous risquons d'encourir une perte qui excèderait le profit initial, causant ainsi un déficit en bout de ligne. Ceci se produit évidemment si l'option est encore plus surévaluée.

Afin de visualiser cela, appliquons ce principe à notre exemple.

Etape 1 $(n=3)$: Exactement comme précédemment.

Etape 2 $(n=2)$: Supposons que l'action monte à 120 et donc $A=0.848$. Supposons que l'option transige à 75. Puisque sa valeur est 60.463, elle est surévaluée de 14.537. Avec 0.719 actions, nous devons racheter $1-0.848=0.152$ options afin d'atteindre un rapport de couverture de $0.848=\frac{0.719}{0.848}$. Cela coûte $75(0.152)=11.40$. Nous empruntons donc 11.40. Puisque le taux d'intérêt est de 0.1, on doit déjà un montant de $23.455(1.1)=25.801$. Notre endettement total à ce stade est donc de $25.801+11.40=37.201$.

Etape 3 $(n=1)$: Supposons maintenant que l'action tombe à 60 et que l'option transige à 5.454. Puisque l'option est maintenant évaluée correctement, maintenir notre position ne générera pas de profits additionnels. Nous devons donc liquider en vendant 0.719 actions à $0.719(60)=43.14$ et racheter les 0.848 options à $0.848(5.454)=4.625$. Nous recevons donc $43.14-4.625=38.515$. On utilise ce montant pour repayer une partie de notre dette. Puisque nous devons, à ce point $37.20(1.1) = 40.921$, après le remboursement nous devons $40.921 - 38.515 = 2.406$. On retourne à la banque pour retirer notre dépôt initial, qui vaut maintenant $1.935(1.1)^2 = 2.341$. Malheureusement, en utilisant ce montant pour repayer notre dette, on reste avec un déficit de 0.065.

Puisque nous avons ajusté notre position à l'étape 2 en achetant des options surévaluées, notre profit a baissé. En fait, puisque les options étaient considérablement surévaluées, on s'est retrouvé avec un déficit, malgré le profit réalisé à l'étape 1. À partir de notre simulation, nous pouvons conclure une loi fondamentale: Ne jamais ajuster une position couverte en achetant des options surévaluées ou en vendant des options sous-évaluées. On déduit de là que lorsqu'on ajuste notre position couverte en achetant des options sous-évaluées ou en vendant des options surévaluées, on augmente notre profit. En résumé, lors d'un ajustement de portefeuille couvert en temps intermédiaires, en choisissant les bonnes positions à ajuster, il est possible d'assurer un profit égal au différentiel de prix initial plus intérêts.

5 Cas limites

À la lumière des sections précédentes, il est naturel d'associer à chaque période une durée de temps, disons un jour. En supposant cela, deux objections surgissent instinctivement. Premièrement, disons que l'action fluctue une seule fois par jour, elle peut définitivement prendre plus que deux valeurs. Deuxièmement, il est faux de supposer qu'une action fluctue une seule fois par jour. En fait, elle fluctue de manière quasi-continue.

Heureusement, notre modèle peut être généralisé de manière à répondre à ces objections qui sont tout à fait valides. En fait, rien ne nous empêche de considérer une période comme étant aussi petite qu'on veut. En faisant cela, on répond aux deux objections simultanément. Tout d'abord, l'action fluctuerait quasi-continuellement, et en fin de journée, l'action pourrait prendre des centaines (voire milliers) de valeurs.

Nous devons toutefois faire quelques ajustements afin de conserver des probabilités adéquates. Il est clair que les probabilités d'incrément en une minute ne sont pas les mêmes que celles d'incrément en une journée.

Supposons que h représente le temps écoulé entre deux fluctuations du prix de l'action. Si t est le temps qu'il reste avant la date d'expiration, et n est le nombre de périodes de longueur h avant expiration, alors

$$h := \tfrac{t}{n}$$

Évidemment, plus il y a de transactions, plus h s'approche de zéro. Il faut donc ajuster les variables r, u, et d afin d'obtenir des résultats réalistes lorsque h devient petit, ou, de manière équivalente, lorsque $n \to \infty$.

Précédemment, alors que nous avions des périodes de longueurs fixes, r représentait simultanément le taux d'intérêt sur une période, ainsi que sur un temps fixe donné. Nous devons, à présent, distinguer entre ces deux notions. Nous conserverons r comme étant un plus le taux d'intérêt sur un intervalle de temps fixe. Lorsque nous voudrons désigner un plus le taux d'intérêt sur une période de longueur h, nous utiliserons le symbole $\widehat{r}$.

Naturellement, $\widehat{r}$ dépend du nombre de sous-intervalles, n, en lesquels nous avons divisé t. Sur les n périodes avant expiration, le rendement est de $\widehat{r}^n$, où $n = \frac{t}{h}$. Puisque le taux d'intérêt sur un intervalle de temps fixe est indépendant de la manière de diviser cet intervalle, nous voulons que $\widehat{r}$ dépende de n de sorte que $\widehat{r}^n$ demeure constant sur t, quelque soit n.

Si r désigne un plus le taux d'intérêt sur une période de temps fixe, alors sur un temps t, le rendement est r^t. Cette valeur ne dépend pas de n. Nous voulons toutefois que $\widehat{r}^n = r^t$ quelque soit notre choix de n. Par conséquent, $\widehat{r} = r^{\frac{t}{n}}$. Cette équation montre comment $\widehat{r}$ doit dépendre de n afin que le rendement sur t soit indépendant de n. Nous devons également définir u et d en fonction de n. Dépendamment des définitions que nous choisissons lorsque $n \to \infty$(ou, réciproquement, lorsque $h \to 0$), nous pouvons avoir soit un modèle continu, soit un modèle stochastique à sauts. En fait tout dépendra de la manière dont nous évaluerons la limite. Dans la première situation, l'action fluctue très peu sur un petit intervalle. Elle fluctue continuellement, mais sa promenade aléatoire peut être tracée sans lever le crayon. Par opposition, dans la seconde situation, le prix de l'action fluctue de manière déterministe et selon un tracé lisse. Il y aura cependant quelques points de discontinuité de temps à autres. Les deux définitions peuvent être dérivées du modèle binomial des sections précédentes simplement en déterminant comment u et d dépendent de n. Nous allons examiner en détail le modèle continu qui mène éventuellement à la formule connue d'évaluation de produits dérivés développée par Fischer Black et Myron Scholes. Ensuite, nous allons indiquer comment développer le modèle stochastique à sauts développé par John Cox et Stephen Ross.

Rappelons nous que nous avons supposé que, sur chaque période, le prix de l'action varie d'un facteur u avec probabilité q, et d'un facteur d avec probabilité $1-q$. Puisque les valeurs u, d, et q dépendent de n, nous allons les noter u_n, d_n, et q_n respectivement. Il est beaucoup plus commode de travailler avec des logarithmes. Nous allons donc considérer $\log u_n$ et $\log d_n$.

Considérons une suite typique de mouvements, huit périodes avant la date d'expiration: disons[5] u_8, u_8, u_8, d_8, d_8, u_8, u_8, d_8. Le prix final de l'action sera $S^* = u_8u_8u_8d_8d_8u_8u_8d_8S$. Donc, $\frac{S^*}{S} = u_8^5d_8^3$, et $\log\left(\frac{S^*}{S}\right) = 5\log u_8 + 3\log d_8$. En général,

$$\log\left(\tfrac{S^*}{S}\right) = j\log u_n + (n-j)\log d_n = j\log\left(\tfrac{u_n}{d_n}\right) + n\log d_n,$$

où j est le nombre (aléatoire) de mouvements vers le haut au cours des n périodes avant la date d'expiration. L'espérance de $\log\left(\frac{S^*}{S}\right)$ est

$$E\left[\log\left(\tfrac{S^*}{S}\right)\right] = \left[\log\left(\tfrac{u_n}{d_n}\right)\right]\cdot E(j) + n\log d_n,$$

et sa variance est

$$\mathrm{Var}\left[\log\left(\tfrac{S^*}{S}\right)\right] = \left[\log\left(\tfrac{u_n}{d_n}\right)\right]^2\cdot \mathrm{Var}\,[j]$$

Chacun des n mouvements a une probabilité q_n de se produire vers le haut. Donc, $E[j] = nq_n$, et $\mathrm{Var}\,[j] = nq_n(1-q_n)$.

On a donc,

$$E\left[\log\left(\tfrac{S^*}{S}\right)\right] = \left[q_n\log\left(\tfrac{u_n}{d_n}\right) + \log d_n\right]n := \widehat{\mu}n$$

$$\mathrm{Var}\left[\log\left(\tfrac{S^*}{S}\right)\right] = q_n(1-q_n)\left[\log\left(\tfrac{u_n}{d_n}\right)\right]^2 n := \widehat{\sigma}^2 n$$

[5] u_8 est en fait le facteur à la hausse lorsque la période t est divisée en 8 sous-périodes. Réciproquement, d_8 est défini comme étant le facteur à la baisse lorsque la période t est divisée en 8 sous-périodes.

Nous voulons subdiviser notre intervalle de temps en plusieurs petits sous-intervalles. Ceci revient donc à augmenter n. Considérons comme constantes toutes nos variables, et faisons tendre n vers l'infini. Si $\widehat{\mu}n$ ou $\widehat{\sigma}^2 n$ tend vers l'infini ou zéro lorsque n tend vers l'infini, nos résultats sont insensés et donc sans conclusion. Puisque t est un temps fixe, il faut ajuster u_n, d_n, et q_n de manière à obtenir un résultat réaliste. Nous voulons au moins que l'espérance et la variance du taux de rendement composé continuellement ($E[\log(\frac{S^*}{S})]$ et $\mathrm{Var}[\log(\frac{S^*}{S})]$) soient égaux à ceux de l'action lorsque $n \to \infty$. Désignons les valeurs actuelles expérimentales de $\widehat{\mu}n$ et $\widehat{\sigma}^2 n$ par μt et $\sigma^2 t$ respectivement. Nous voulons choisir u_n, d_n, et q_n de manière à ce que

$$\lim_{n\to\infty}\left[q_n \log\left(\frac{u_n}{d_n}\right) + \log d_n\right] n = \mu t \text{ et } \lim_{n\to\infty} q_n(1-q_n)\left[\log\left(\frac{u_n}{d_n}\right)\right]^2 n = \sigma^2 t.$$

Dans l'article de Cox-Ross-Rubenstein, il est écrit que $\lim_{n\to\infty}\left[q_n \log\left(\frac{u_n}{d_n}\right) + \log d_n\right] n = \mu t$ et $\lim_{n\to\infty} q_n(1-q_n)\left[\log\left(\frac{u_n}{d_n}\right)\right]^2 n = \sigma^2 t$ si

$$u_n = e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}, \quad d_n = e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}, \quad q_n = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\mu}{\sigma}\right)\sqrt{\tfrac{t}{n}}.$$

Or, ceci suppose que $u_n \cdot d_n = 1$. C'est à dire que si l'action effectue une montée puis une descente au cours des deux prochaines périodes, elle se retrouvera au même prix. Toutefois, il est possible de généraliser cette solution au cas $u_n \cdot d_n = \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}^+$. C'est-à-dire, au cas où l'action a une tendance à la hausse ou à la baisse dépendamment si $\alpha > 1$ ou $0 < \alpha < 1$ respectivement.

Avec un peu d'algèbre [6], on montre que $u_n \cdot d_n = \alpha$ implique que

$$u_n = e^{\frac{\log \alpha}{2} + \frac{\sqrt{[4\sigma^2 tn + (n \log \alpha - 2\mu t)^2]}}{2n}}, \qquad d_n = e^{\frac{\log \alpha}{2} - \frac{\sqrt{[4\sigma^2 tn + (n \log \alpha - 2\mu t)^2]}}{2n}},$$

et

$$q_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{|n \log \alpha - 2\mu t|}{\sqrt{[4\sigma^2 tn + (n \log \alpha - 2\mu t)^2]}}.$$

Cependant, avec $\alpha \neq 1$, on a $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$, et par conséquent, nous ne pourrons pas utiliser le théorème limite central.

Il est facile de vérifier que lorsque $\alpha = 1$ nous avons bien

$$u = e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}, \quad q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{t}{n}}.$$

[6]Les calculs se trouvent à l'appendice II.

Dans ce cas, pour tout n, on a

$$\widehat{\mu}n = \mu t \quad \text{et} \quad \widehat{\sigma}^2 n = \left[\sigma^2 - \mu^2\left(\frac{t}{n}\right)\right]t,$$

et donc, lorsque $n \to \infty$, $\widehat{\sigma}^2 n \to \sigma^2 t$ et $\widehat{\mu}n = \mu t$ pour tout n.

Vérifions que $\widehat{\mu}n = \mu t$ et $\widehat{\sigma}^2 n = \left[\sigma^2 - \mu^2(\frac{t}{n})\right]t$.

$$\widehat{\mu}n := \left[q_n \log\left(\frac{u_n}{d_n}\right) + \log d_n\right]n = \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{t}{n}}\right)\log\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}{e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}\right) + \log e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}\right]n$$

donc,

$$\widehat{\mu}n = \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{t}{n}}\right)\cdot 2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}} - \sigma\sqrt{\frac{t}{n}}\right]n = \mu t$$

et aussi,

$$\widehat{\sigma}^2 n := q_n(1-q_n)\left[\log\left(\frac{u_n}{d_n}\right)\right]^2 n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{t}{n}}\right)\cdot\left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{t}{n}}\right)\right)\left[\log\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}{e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}\right)\right]^2 n$$

donc,

$$\widehat{\sigma}^2 n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{t}{n}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{t}{n}}\right)\cdot\left[2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}\right]^2 n$$

et

$$\widehat{\sigma}^2 n = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2}\right)\frac{t}{n}\right)\cdot 4\sigma^2\frac{t}{n}\cdot n = \left[\sigma^2 - \mu^2\left(\frac{t}{n}\right)\right]t.$$

Les espérances et variances limites coïncident. Nous devons toutefois vérifier que nous atteignons une distribution de probabilité du taux de rendement composé continuellement qui est sensée. L'espérance et la variance ne donnent qu'un aperçu de notre distribution.

Dans notre modèle, le taux de rendement composé continuellement sur une période t est une somme de n variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, dont chacune prend la valeur $\log u_n$ avec probabilité q_n, et $\log d_n$ avec probabilité $1 - q_n$. Nous voulons en savoir plus au sujet de notre distribution lorsque $n \to \infty$, et u_n, d_n, et q_n sont choisis de la manière décrite ci haut.

Afin de montrer que notre modèle binomial possède le modèle de Black-Scholes en cas limite, nous avons besoin de la version d'Alexandr Lyapunov du théorème limite central.

Théorème 5.1. Théorème Limite Central (version de Lyapunov) *[4] Soit* $\{X_{i,n}\}_{i=1}^{\infty}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes avec* $E[X_{i,n}] < \infty$ *et* $\mathrm{Var}[X_{i,n}] < \infty$. *Soient* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_{i,n}$, *et* $\widehat{S_n} = \frac{(S_n - E(S_n))}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}}$. *Alors,*

si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}(X_{i,n})\right)^{\frac{3}{2}}} \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_{i,n} - E(X_{i,n})|^3\right) = 0$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\widehat{S_n} < x\right) = N(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

où $N(x) = P(N(0,1) < x)$.

La formule de Black et Scholes, écrite en utilisant notre notation est:

Formule de Black-Scholes

$$C = SN(x) - Kr^{-t}N\left(x - \sigma\sqrt{t}\right) \quad \text{où} \quad x := \frac{\log\left(\frac{S}{Kr^{-t}}\right)}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}$$

Montrons maintenant que notre formule binomiale converge vers la formule de Black-Scholes lorsque t est divisé en un grand nombre de sous-intervalles, et $\widehat{r}, u_n, d_n,$ et q_n sont choisis de la manière décrite ci haut.

Notre formule binomiale pour évaluer le prix d'option étant $C = S\phi[a; n, p_n'] - K\widehat{r}^{-n}\phi[a; n, p_n]$, la ressemblance de ces deux formules est claire. Évidemment, $\widehat{r}^{-n}$ est toujours égal à r^{-t}. Donc, pour montrer que ces deux formules convergent, il suffira de montrer que lorsque $n \to \infty$,

$$\phi[a; n, p_n'] \to N(x) \quad \text{et} \quad \phi[a; n, p_n] \to N\left(x - \sigma\sqrt{t}\right)$$

Nous allons seulement traiter $\phi[a; n, p_n]$; $\phi[a; n, p_n']$ étant traité de manière identique.

La fonction de distribution $\phi[a; n, p_n]$ donne la probabilité que la somme de n variables aléatoires, chacune pouvant prendre la valeur 1 avec probabilité p_n et 0 avec probabilité $1 - p_n$, soit supérieure à a. Si j est la variable aléatoire représentant cette somme, on sait que j possède une distribution binomiale, et donc, $E\,[j] = np_n$ et $\mathrm{Var}\,[j] = np_n(1 - p_n)$.

Donc,

$$1-\phi[a;n,p_n]=P[j\leq a-1]=P\left[\frac{j-np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\leq\frac{a-1-np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\right].$$

Revenons à nos discussions antérieures qui disaient que si une action peut aller à chaque période à u_nS avec probabilité p_n ou à d_nS avec probabilité $(1-p_n)$, alors $\log\left(\frac{S^*}{S}\right) = j\log(u_n)+(n-j)\log d_n$.

Posons $X_{i,n}=w_{i,n}\log u_n+(1-w_{i,n})\log d_n$, où $w_{i,n}\sim \text{Bin}(1,p_n)$. $w_{i,n}$ sont des variables aléatoires de Bernouilli indépendantes. Nous avons donc,

$$\log\left(\frac{S^*}{S}\right)=\sum_{i=1}^{n}X_{i,n}.$$

Afin de pouvoir utiliser la version de Lyapunov du théorème limite central, il faut d'abord s'assurer que les conditions sont satisfaites. (C'est à dire, il faut vérifier que (i) $E(X_{i,n})<\infty$, (ii) $\text{Var}(X_{i,n})<\infty$, et (iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\text{var}(X_{i,n})\right)^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=1}^{n}E\left(|X_{i,n}-E(X_{i,n})|^3\right)=0$).

(i) Montrons que $E(X_{i,n})<\infty$.
On sait que $w_{i,n}\sim\text{Bin}(1,p_n)$ et donc [7] $E(X_{i,n})=p_n\log\frac{u_n}{d_n}+\log d_n=\widehat{\mu}_{p_n}<\infty$

(ii) Montrons que $\text{Var}(X_{i,n})<\infty$.
Puisque $\text{Var}(X_{i,n})=E\left(X_{i,n}^2\right)-\left(E(X_{i,n})\right)^2$, alors $\text{Var}(X_{i,n})=p_n(1-p_n)\left(\log\frac{u_n}{d_n}\right)^2=\widehat{\sigma}^2_{p_n}<\infty$.
(iii) Montrons que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\text{var}(X_{i,n})\right)^{\frac{3}{2}}}\sum_{i=1}^{n}E\left(|X_{i,n}-E(X_{i,n})|^3\right)=0$.

Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned}X_{i,n}-E(X_{i,n}) &= w_{i,n}\log u_n+(1-w_{i,n})\log d_n-p_n\log u_n-(1-p_n)\log d_n\\ &= (w_{i,n}-p_n)\log u_n-(w_{i,n}-p_n)\log d_n\\ &= (w_{i,n}-p_n)\log\tfrac{u_n}{d_n},\end{aligned}$$

et donc,

$$|X_{i,n}-E(X_{i,n})|=|(w_{i,n}-p_n)|\log\frac{u_n}{d_n},$$

et

[7] $E(w_{i,n})=p_n$ et $E(w_{i,n}^2)=p_n$. Cela implique que $E(X_{i,n})=E[w_{i,n}(\log u_n)+(1-w_{i,n})(\log d_n)]=p_n\log\frac{u_n}{d_n}+\log d_n=\widehat{\mu}_{p_n}<\infty$

[8] $\text{Var}(w_{i,n})=E(w_{i,n}^2)-\left(E(w_{i,n})\right)^2=p_n(1-p_n)$.

$$|X_{i,n} - E(X_{i,n})|^3 = |(w_{i,n} - p_n)|^3 \log^3 \frac{u_n}{d_n}.$$

En évaluant l'espérance, on obtient

$$E\big[|X_{i,n} - E(X_{i,n})|^3\big] = \big[(1-p_n)^3 p_n + p_n^3(1-p_n)\big] \log^3 \frac{u_n}{d_n},$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{var}(X_{i,n})\right)^{\frac{3}{2}}} \sum_{i=1}^{n} E\big(|X_{i,n} - E(X_{i,n})|^3\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \big[(1-p_n)^3 p_n + p_n^3(1-p_n)\big] \log^3 \frac{u_n}{d_n}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_n(1-p_n)\left(\log\frac{u_n}{d_n}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

qui est égal à

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\big[(1-p_n)^3 p_n + p_n^3(1-p_n)\big] \log^3 \frac{u_n}{d_n}}{\left(np_n(1-p_n)\left(\log\frac{u_n}{d_n}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

qui se réduit à

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1-p_n)^2 + p_n^2}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}. \tag{5.1}$$

Or, on sait que $p_n := \frac{(\widehat{r}-d_n)}{(u_n-d_n)}$, $\widehat{r} = r^{\frac{t}{n}}$, $u_n = e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}$, et $d_n = e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}$. Nous allons montrer que, lorsque $n \to \infty$,

$$p_n \longrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\log r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{t}{n}},$$

et donc $p_n \to \frac{1}{2}$ lorsque $n \to \infty$.

r, μ, σ et t étant considérés comme des constantes, montrer que $p_n \to \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\log r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{t}{n}}$ revient à montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} 2\sqrt{n}(p - \frac{1}{2}) = \left(\frac{\log r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)\sqrt{t}$.

En remplaçant p_n par $\frac{(\widehat{r}-d)}{(u-d)}$, u_n par $e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}$, et d_n par $e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}$, et en remarquant que $\widehat{r} = r^{\frac{t}{n}} = e^{\frac{t}{n}\log r}$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} 2\sqrt{n}\left(p_n - \frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt{n}\left(\frac{e^{\frac{t}{n}\log r} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}} - \frac{1}{2}\right).$$

Avec quelques manipulations algébriques, cette expression devient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(2e^{\frac{t}{n}\log r + \sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - e^{2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - 1\right)}{e^{2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - 1},$$

qui est équivalente à

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(2e^{\frac{t}{n}\log r+\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - e^{2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - 1\right)}{\frac{e^{2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}-1}{\sqrt{n}}}$$

Le numérateur et le dénominateur tendent vers zéro. Nous pouvons donc appliquer le théorème de l'Hospital. En dérivant le numérateur et le dénominateur, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2e^{\frac{t}{n}\log r+\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}\cdot\left(\frac{-t\log r}{n^2} - \frac{\sigma\sqrt{t}}{2n^{\frac{3}{2}}}\right) - e^{2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}\cdot\left(-\frac{\sigma\sqrt{t}}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}{\frac{e^{2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}\cdot\left(-\frac{\sigma\sqrt{t}}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\cdot\sqrt{n} - \left(e^{2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}-1\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{n}}}{n}}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $n^{\frac{3}{2}}$, on obtient l'expression simplifiée

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2e^{\frac{t}{n}\log r+\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}\cdot\left(\frac{-t\log r}{\sqrt{n}} - \frac{\sigma\sqrt{t}}{2}\right) + \sigma\sqrt{t}e^{2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}{\frac{-\sigma\sqrt{t}e^{2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\left(e^{2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - 1\right)}.$$

Le numérateur et le dénominateur tendent encore vers zéro. Nous pouvons donc appliquer le théorème de l'Hospital une seconde fois.

En dérivant le numérateur et le dénominateur, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2e^{\frac{t}{n}\log r+\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}\left(\frac{-t\log r}{n^2} - \frac{\sigma\sqrt{t}}{2n^{\frac{3}{2}}}\right)\cdot\left(\frac{-t\log r}{\sqrt{n}} - \frac{\sigma\sqrt{t}}{2}\right) + 2e^{\frac{t}{n}\log r+\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}\left(\frac{t\log r}{2n^{\frac{3}{2}}}\right) + \sigma\sqrt{t}e^{2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}\cdot\left(-\frac{\sigma\sqrt{t}}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}{-\sigma\sqrt{t}\frac{e^{2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}\cdot\left(-\frac{\sigma\sqrt{t}}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\sqrt{n} - e^{2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{n}}}{n} - \frac{1}{2}e^{2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}\cdot\left(-\frac{\sigma\sqrt{t}}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}.$$

Cette expression peut être réduite à

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2e^{\frac{t}{n}\log r+\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}\left(\frac{t^2\log^2 r}{n^{\frac{5}{2}}} + \frac{\sigma t\sqrt{t}\log r}{2n^2} + \frac{\sigma t\sqrt{t}\log r}{2n^2} + \frac{\sigma^2 t}{4n^{\frac{3}{2}}} + \frac{t\log r}{2n^{\frac{3}{2}}}\right) - \frac{\sigma^2 te^{2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}{n^{\frac{3}{2}}}}{e^{2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}\left(\frac{\sigma^2 t}{n^2}\frac{\sigma\sqrt{t}}{2n^{\frac{3}{2}}} + \frac{\sigma\sqrt{t}}{2n^{\frac{3}{2}}}\right)}.$$

En multipliant encore une fois le numérateur et le dénominateur par $n^{\frac{3}{2}}$, on obtient l'expression simplifiée

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2e^{\frac{t}{n}\log r+\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}\left(\frac{t^2\log^2 r}{n} + \frac{\sigma t\sqrt{t}\log r}{2\sqrt{n}} + \frac{\sigma t\sqrt{t}\log r}{2\sqrt{n}} + \frac{\sigma^2 t}{4} + \frac{t\log r}{2}\right) - \sigma^2 te^{2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}{e^{2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}\left(\frac{\sigma^2 t}{\sqrt{n}} + \sigma\sqrt{t}\right)}.$$

En évaluant la limite, on obtient

$$\frac{2\left(\frac{\sigma^2 t}{4} + \frac{t \log r}{2}\right) - \sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}},$$

qui se réduit finalement à

$$\left(\frac{\log r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)\sqrt{t}.$$

Nous avons donc montré que, lorsque $n \to \infty$,

$$p_n \to \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\log r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{t}{n}},$$

et donc $p_n \to \frac{1}{2}$. Par conséquent, la limite à l'équation (5.1) est zéro.

La condition initiale est satisfaite, et nous sommes maintenant en mesure d'appliquer le théorème limite central.

On se souvient que la fonction de distribution $\phi[a; n, p_n]$ donne la probabilité que la somme de n variables aléatoires, chacune pouvant prendre la valeur 1 avec probabilité p_n et 0 avec probabilité $1 - p_n$, soit supérieure à a. Donc,

$$1 - \phi[a; n, p_n] = P[j \leq a - 1] = P\left[\frac{j - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}} \leq \frac{a - 1 - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\right]. \tag{5.2}$$

Or,

$$\log\left(\frac{S^*}{S}\right) = j \log\left(\frac{u_n}{d_n}\right) + n \log d_n,$$

et donc

$$j = \frac{\log\left(\frac{S^*}{S}\right) - n \log d_n}{\log\left(\frac{u_n}{d_n}\right)}.$$

En remplaçant j dans (5.2), on obtient

$$P[j \leq a - 1] = P\left[\frac{\frac{\log\left(\frac{S^*}{S}\right) - n \log d}{\log\left(\frac{u}{d}\right)} - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}} \leq \frac{a - 1 - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\right],$$

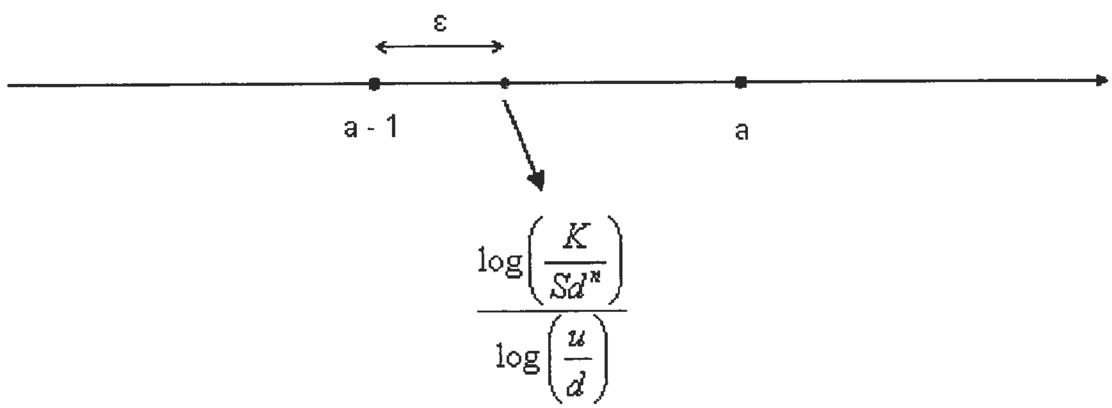
qui peut être simplifiée à

$$P[j \leq a - 1] = P\left[\frac{\log\left(\frac{S^*}{S}\right) - n \log d_n - np_n \log\left(\frac{u_n}{d_n}\right)}{\log\left(\frac{u_n}{d_n}\right)\sqrt{np_n(1-p_n)}} \leq \frac{a - 1 - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\right].$$

Mais puisque $\widehat{\mu}_{p_n} = p_n \log\left(\frac{u_n}{d_n}\right) + \log d_n$ et $\widehat{\sigma}^2_{p_n} = p_n(1-p_n)\left[\log\left(\frac{u_n}{d_n}\right)\right]^2$, alors (5.2) devient

$$P[j \leq a-1] = P\left[\frac{\log\left(\frac{S^*}{S}\right) - \widehat{\mu}_{p_n} n}{\widehat{\sigma}_{p_n}\sqrt{n}} \leq \frac{a-1-np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}\right].$$

Dans la formule binomiale, on se rappelle avoir noté a le plus petit entier non-négatif supérieur à $\frac{\log\left(\frac{K}{S\,d_n{}^n}\right)}{\log\left(\frac{u_n}{d_n}\right)}$. Le diagramme suivant illustre cette situation.



Nous avons donc

$$a-1 = \frac{\log\left(\frac{K}{S\,d_n{}^n}\right)}{\log\left(\frac{u_n}{d_n}\right)} - \varepsilon = \frac{\log\left(\frac{K}{S}\right) - n\log d_n}{\log\left(\frac{u_n}{d_n}\right)} - \varepsilon,$$

où $0 < \varepsilon < 1$.

En utilisant les définitions de $\widehat{\mu}_{p_n}$ et $\widehat{\sigma}^2_{p_n}$, on obtient

$$\frac{a-1-np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}} = \frac{\frac{\log\left(\frac{K}{S}\right) - n\log d_n}{\log\left(\frac{u_n}{d_n}\right)} - \varepsilon - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}}.$$

En simplifiant un peu, on obtient

$$\frac{\log\left(\frac{K}{S}\right) - n\log d_n - \varepsilon\log\left(\frac{u_n}{d_n}\right) - np_n\log\left(\frac{u_n}{d_n}\right)}{\log\left(\frac{u_n}{d_n}\right)\sqrt{np_n(1-p_n)}},$$

qui est égal à

$$\frac{\log\left(\frac{K}{S}\right) - \widehat{\mu}_{p_n} n - \varepsilon \log\left(\frac{u_n}{d_n}\right)}{\widehat{\sigma}_{p_n}\sqrt{n}},$$

et donc

$$\frac{a - 1 - np_n}{\sqrt{np_n(1-p_n)}} = \frac{\log\left(\frac{K}{S}\right) - \widehat{\mu}_{p_n} n - \varepsilon \log\left(\frac{u_n}{d_n}\right)}{\widehat{\sigma}_{p_n}\sqrt{n}}.$$

En combinant nos résultats, (5.6) devient

$$1 - \phi[a; n, p_n] = P\left[\frac{\log\left(\frac{S^*}{S}\right) - \widehat{\mu}_{p_n} n}{\widehat{\sigma}_{p_n}\sqrt{n}} \leq \frac{\log\left(\frac{K}{S}\right) - \widehat{\mu}_{p_n} n - \varepsilon \log\left(\frac{u_n}{d_n}\right)}{\widehat{\sigma}_{p_n}\sqrt{n}}\right]. \tag{5.3}$$

Il ne nous reste qu'à évaluer $\widehat{\mu}_{p_n} n$, $\widehat{\sigma}_{p_n}\sqrt{n}$ et $\varepsilon \log\left(\frac{u_n}{d_n}\right)$ lorsque $n \to \infty$.

Commençons par $\widehat{\mu}_{p_n} n$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \widehat{\mu}_{p_n} n &= \lim_{n\to\infty} \left(p_n \log \tfrac{u_n}{d_n} + \log d_n\right) n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(2\sigma p_n \sqrt{\tfrac{t}{n}} - \sigma\sqrt{\tfrac{t}{n}}\right) n \\
&= \lim_{n\to\infty} 2\sigma\sqrt{tn}\left(p_n - \tfrac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Cette limite a été évaluée plus haut, et donne $\left(\log r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t$. Nous avons donc,

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{\mu}_{p_n} n = \left(\log r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t.$$

En ce qui concerne $\widehat{\sigma}_{p_n}\sqrt{n}$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \widehat{\sigma}_{p_n}\sqrt{n} &= \lim_{n\to\infty} \log\left(\tfrac{u_n}{d_n}\right) \sqrt{np_n(1-p_n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} 2\sigma\sqrt{\tfrac{t}{n}}\sqrt{np_n(1-p_n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} 2\sigma\sqrt{t}\sqrt{p_n(1-p_n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} 2\sigma\sqrt{t}\sqrt{\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}} \\
&= \sigma\sqrt{t}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc,

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{\sigma}_{p_n}\sqrt{n} = \sigma\sqrt{t}.$$

Calculons finalement $\varepsilon \log\left(\frac{u_n}{d_n}\right)$ lorsque $n \to \infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \varepsilon \log\left(\tfrac{u_n}{d_n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \varepsilon\, 2\sigma\sqrt{\tfrac{t}{n}} \\ &= 0,\end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon \log\left(\frac{u_n}{d_n}\right) = 0.$$

L'équation (5.3) devient

$$1 - \phi[a; n, p_n] = P\left[\frac{\log\left(\frac{S^*}{S}\right) - \widehat{\mu}_{p_n} n}{\widehat{\sigma}_{p_n}\sqrt{n}} \leq \frac{\log\left(\frac{K}{S}\right) - \left(\log r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\, t}{\sigma\sqrt{t}}\right].$$

Donc, puisque

$$\frac{\log\left(\frac{K}{S}\right) - \widehat{\mu}_{p_n} n - \varepsilon \log\left(\frac{u_n}{d_n}\right)}{\widehat{\sigma}_{p_n}\sqrt{n}} \to z = \frac{\log\left(\frac{K}{S}\right) - \left(\log r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\, t}{\sigma\sqrt{t}},$$

on a (en vertu du théorème limite central),

$$1 - \phi[a; n, p_n] \to N\left(z\right) = N\left[\frac{\log\left(\frac{\mathrm{Kr}^{-t}}{S}\right)}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}\right].$$

En utilisant la propriété de symétrie de la distribution normale centrée réduite, qui nous dit que $1 - N\left(z\right) = N\left(-z\right)$, on a

$$\phi[a; n, p_n]. \to N\left(-z\right) = N\left[\frac{\log\left(\frac{S}{\mathrm{Kr}^{-t}}\right)}{\sigma\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}\right] = N\left(x - \sigma\sqrt{t}\right),$$

où $x = \frac{\log\left(\frac{S}{\mathrm{Kr}^{-t}}\right)}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}$.

En procédant de manière analogue, il est possible de montrer que $\phi[a; n, p_n'] \to N(x)$. La seule différence est le fait que lorsque $n \to \infty$, $p_n' \to \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\left(\log r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)/\sigma\right]\sqrt{\frac{t}{n}}$.

Nous venons donc de démontrer que la formule binomiale contient la formule $C = SN(x) - Kr^{-t}N\left(x - \sigma\sqrt{t}\right)$ où $x := \frac{\log\left(\frac{S}{\mathrm{Kr}^{-t}}\right)}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t}$ en cas limite, qui est en fait la formule de Black-Scholes.

Black et Scholes ont commencé leur étude directement en mode continu en supposant que le prix de l'action suit une distribution lognormale. Leur approche nécessite des mathématiques assez avancées. Le modèle binomial du présent travail possède en cas limite des transactions continues et la distribution lognormale. Il est important de noter que les arguments économiques utilisés ici pour lier le prix de l'option à celui de l'action sont identiques à ceux utilisés par Black et Scholes (1973) et Merton (1973, 1977).

L'approche de Black-Scholes les menait à l'équation à dérivées partielles

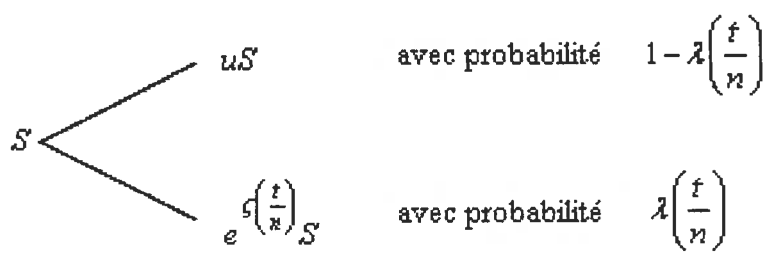
$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (\log r) S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} - (\log r) C = 0.$$

La valeur de l'option C était calculée en résolvant cette équation sujet à la condition frontière $C = \max[0, S - K]$.

Nous remarquons que notre formule binomiale contient la formule de Black-Scholes ainsi qu'un processus à sauts à temps continu. Le modèle sur lequel nous débouchons dépend de la manière dont nous évaluons notre limite. Supposons que nous avions choisi u_n, d_n et q_n de la manière suivante:

$$u_n = u_n, \quad d_n = e^{\zeta\left(\frac{t}{n}\right)}, \quad q_n = \lambda\left(\frac{t}{n}\right).$$

Cette paramétrisation mène à un processus à sauts où chaque valeur prise par l'action est presque toujours proche de la valeur précédente ($S \to d_n S$), mais à l'occasion, avec une faible probabilité, considérablement différente ($S \to u_n S$). Remarquons que lorsque $n \to \infty$, la probabilité d'un changement par d_n devient de plus en plus grande, alors que la probabilité d'un changement par u_n tend vers zéro.



Dans cette situation, la condition initiale de la version du théorème limite central que nous avons utilisé n'est plus vérifiée, et il est possible de montrer que les variations du prix de l'action suivent une distribution log-Poisson lorsque $n \to \infty$. Posons

$$\Psi[x; y] := \sum_{i=x}^{\infty} \frac{e^{-y} y^i}{i!},$$

comme la fonction de distribution d'une Poisson complémentaire.

La formule pour évaluer le prix d'option en cas limite avec la paramétrisation ci haut est

Formule du Prix d'Option par un Processus à Sauts

$C = S\Psi[x; y] - Kr^{-n}\Psi[x; y/u]$,
où
$y := \dfrac{(\log r - \zeta)\, ut}{u - 1}$
et
$x :=$plus petit entier non-négatif supérieur à $\frac{\log\left(\frac{K}{S}\right) - \zeta t}{\log u}$.

Il existe une formule très similaire si on paramétrise de la manière suivante:

$$u_n = e^{\zeta\left(\frac{t}{n}\right)}, \quad d_n = d_n, \quad 1 - q_n = \lambda\left(\frac{t}{n}\right).$$

6 Dividendes et options de vente

Jusqu'à présent, nous avons supposé que l'action ne rapporte pas de dividendes. Considérons maintenant la politique de distribution de dividendes suivante: l'action maintient un taux de rendement en dividendes constant, δ, à chaque date d'émission de dividendes. Supposons qu'à une période de la date d'expiration, une action vaut S. Si en fin de période on émet des dividendes, alors un individu qui possédait cette action en début de période recevra δuS ou δdS. Donc, en fin de période, l'action vaudra $u(1-\delta)^{\nu}S$ ou $d(1-\delta)^{\nu}S$, où $\nu = 1$ si on émet des dividendes à ce moment, et $\nu = 0$ sinon. On supposera que δ et ν sont connus avec certitude.

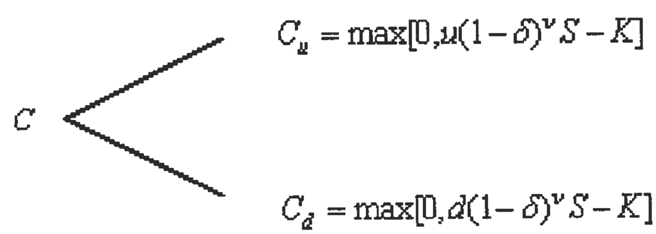
Lorsque l'option d'achat expire, sa valeur doit être

$$C_u = \max[0, u(1-\delta)^{\nu}S - K],$$

ou

$$C_d = \max[0, d(1-\delta)^{\nu}S - K].$$

Donc,



Nous pouvons donc maintenant procéder exactement de la même manière qu'avant. On crée donc un portefeuille couvert formé de A actions et une valeur de B en obligations de manière à ce que la valeur du portefeuille en fin de période équivaut à celle de l'option en fin de période. Nous pouvons donc montrer que

$$C = \frac{[pC_u + (1-p)C_d]}{\widehat{r}},$$

si cette valeur est supérieure à $S-K$, et $C = S-K$ sinon. Nous avons encore $p = \frac{(\widehat{r}-d)}{u-d}$ et $A = \frac{(C_u - C_d)}{(u-d)S}$.

Pour l'instant, la seule différence réside dans le fait que $(1-\delta)^{\nu}S$ a remplacé S dans le calcul de C_u et C_d. Nous arrivons maintenant à notre différence plus significative: exercer l'option avant la date d'expiration peut être optimal. Afin de réaliser cela, supposons que $\nu = 1$ et $d(1-\delta)S > K$. Puisque $u > d$, alors clairement, $u(1-\delta)S > K$. Dans ce cas, $C_u = u(1-\delta)S - K$ et $C_d = d(1-\delta)S - K$. Donc, puisque $(\frac{u}{\widehat{r}})p + (\frac{d}{\widehat{r}})(1-p) = 1$, montrons que $\frac{[pC_u + (1-p)C_d]}{\widehat{r}} = (1-\delta)S - (\frac{K}{\widehat{r}})$.

En remplaçant C_u et C_d par leurs valeurs respectives, on a

$$\frac{[pC_u + (1-p)C_d]}{\widehat{r}} = \frac{[p(u(1-\delta)S - K) + (1-p)(d(1-\delta)S - K)]}{\widehat{r}},$$

et donc, en simplifiant on obtient

$$\frac{[pC_u + (1-p)C_d]}{\widehat{r}} = (1-\delta)\left(\left(\frac{u}{\widehat{r}}\right)p + \left(\frac{d}{\widehat{r}}\right)(1-p)\right)S - \left(\frac{K}{\widehat{r}}\right) = (1-\delta)S - \left(\frac{K}{\widehat{r}}\right).$$

Pour des actions dont le prix est assez élevé, cette valeur peut clairement être inférieure à $S-K$. Il existe dont des circonstances où personne ne souhaiterait conserver l'option pour une période additionnelle.

En fait, il existera toujours un prix critique, $\widehat{S}$, tel que si $S > \widehat{S}$, l'option doit être exercée immédiatement. Évidemment, $\widehat{S}$ est la valeur de l'action où $\frac{[pC_u+(1-p)C_d]}{\widehat{r}} = S-K$. C'est-à-dire, la valeur minimale de l'action qui rendrait le portefeuille couvert égal à $S-K$.

Calculons $\widehat{S}$. Nous voulons donc trouver S tel que

$$\frac{[pC_u + (1-p)C_d]}{\widehat{r}} = S - K.$$

Cette équation est vraie si

$$S\widehat{r} = pC_u + (1-p)C_d + K\widehat{r}.$$

Or, puisque $C_u = u(1-\delta)^{\nu}S - K$ et $C_d = d(1-\delta)^{\nu}S - K$, l'équation devient

$$S\widehat{r} = p(u(1-\delta)^{\nu}S - K) + (1-p)(d(1-\delta)^{\nu}S - K) + K\widehat{r},$$

et donc,

$$\widehat{S} = \frac{K(\widehat{r}-1)}{\widehat{r} - up(1-\delta)^{\nu} - d(1-p)(1-\delta)^{\nu}}.$$

On remarque que, si tous les autres paramètres restent constants, $\widehat{S}$ baisse lorsque le rendement en dividendes monte, le taux d'intérêt baisse, et le prix d'exercice baisse.

Nous allons maintenant étendre notre étude, comme précédemment, au cas où le nombre de périodes est arbitraire. Il y a toutefois une légère modification à apporter à l'opération de couverture. Le capital de notre portefeuille couvert sera augmenté des dividendes perçus ou diminué des dividendes distribués.

Soit C la valeur actuelle d'une option d'achat, n périodes avant la date d'expiration. Définissons

$$\overline{v}(n,i) := \sum_{k=1}^{n-i} v_k,$$

de manière que $\overline{v}(n,i)$ représente le nombre de dates d'émission de dividendes durant les $n-i$ prochaines périodes. Soit $C(n,i,j)$ la valeur de l'option d'achat dans $n-i$ périodes, sachant que le prix actuel de l'action est passé de S à $u_n^j d_n^{n-i-j}(1-\delta)^{\overline{v}(n,i)}S$, où $j = 1, 2, 3, ..., n-i$.

Nous sommes donc en mesure de calculer la valeur actuelle de l'option en procédant de manière récursive.

En date d'expiration, $i = 0$, et donc

$$C(n,0,j) = \max\left[0, u_n^j d_n^{n-j}(1-\delta)^{\overline{\nu}(n,0)}S - K\right] \quad \text{pour} \quad j = 1,2,3,.....,n.$$

Une période avant la date d'expiration, $i = 1$, et donc

$$C(n,1,j) = \max\left[u_n^j d_n^{n-1-j}(1-\delta)^{\overline{\nu}(n,1)}S - K, \frac{[pC(n,0,j+1) + (1-p)C(n,0,j)]}{\widehat{r}}\right]$$

$$\text{pour} \quad j = 1,2,3,.....,n.$$

Donc, en général, pour i périodes avant la date d'expiration, on a

$$C(n,i,j) = \max\left[u_n^j d_n^{n-i-j}(1-\delta)^{\overline{\nu}(n,i)}S - K, \frac{[pC(n,i-1,j+1) + (1-p)C(n,i-1,j)]}{\widehat{r}}\right]$$

$$\text{pour} \quad j = 1,2,3,.....,n.$$

S'il reste n périodes avant la date d'expiration, puisque $i = n$, on a

$$C = C(n,n,0) = \max\left[S - K, \frac{[pC(n,n-1,1) + (1-p)C(n,n-1,0)]}{\widehat{r}}\right],$$

et le rapport de couverture est

$$A = \frac{C(n,n-1,1) - C(n,n-1,0)}{(u-d)S}.$$

Il est facile d'étendre notre étude de manière à inclure des politiques de distribution de dividendes où le montant distribué en dividendes dépend du prix de l'action d'une manière plus générale. Mais, cela causerait quelques complications. Dans notre exemple (où le taux de rendement en dividendes est constant), les valeurs possibles de l'action dans $n - i$ périodes sont entièrement déterminées par le nombre de fois que l'action est montée et le nombre de dates d'émission de dividendes durant cet intervalle. Avec d'autres politiques de distribution de dividendes, cette énumération sera plus compliquée, car en plus du nombre de fois que l'action est montée, il faudra aussi tenir compte des dates où ces montées sont survenues. Mais le principe fondamental est le même. En date d'expiration, nous calculons la valeur de l'option d'achat pour chaque valeur de l'action, puis nous procédons par récurrence pour finalement arriver à la valeur actuelle de l'option.

Illustrons maintenant comment le modèle binomial approxime en temps continu les valeurs des options d'achat. Afin de pouvoir comparer avec une formule exacte en temps continu, nous allons considérer le cas sans dividendes. Supposons que nous connaissons les paramètres S, K, t, σ, et r, qui sont ceux du modèle de Black-Scholes. Nous utiliserons cette information pour trouver les paramètres d_n, u_n, et $\widehat{r}$, qui sont ceux du modèle binomial, à l'aide des relations:

$$d_n = \frac{1}{u_n}, \quad u_n = e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}, \quad \widehat{r} = r^{\frac{t}{n}}.$$

La table suivante donne une idée claire de la précision du modèle binomial pour approximer le modèle de Black-Scholes, illustré à la colonne $n = \infty$.

Approximation par le modèle binômial des valeurs d'options d'achat à temps continu pour (1) janvier, (2) avril, et (3) juillet; S = 40 et r = 1.05

		$n = 5$			$n = 20$			$n = \infty$		
σ	K	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
	35	5.14	5.77	6.45	5.15	5.77	6.39	5.15	5.76	6.40
0.2	40	1.05	2.26	3.12	0.99	2.14	2.97	1.00	2.17	3.00
	45	0.02	0.54	1.15	0.02	0.51	1.11	0.02	0.51	1.10
	35	5.21	6.30	7.15	5.22	6.26	7.19	5.22	6.25	7.17
0.3	40	1.53	3.21	4.36	1.44	3.04	4.14	1.46	3.07	4.19
	45	0.11	1.28	2.12	0.15	1.28	2.23	0.16	1.25	2.24
	35	5.40	6.87	7.92	5.39	6.91	8.05	5.39	6.89	8.09
0.4	40	2.01	4.16	5.61	1.90	3.93	5.31	1.92	3.98	5.37
	45	0.46	1.99	3.30	0.42	2.09	3.42	0.42	2.10	3.43

Les options de janvier ont un mois avant la date d'expiration, celles d'avril en ont quatre et celles de juillet en ont sept; r et σ sont exprimés sur une base annuelle.

Lorsque $n = 5$, l'écart n'excède pas \$0.25, et lorsque $n = 20$, l'écart n'excède pas \$0.07.

Nous pouvons maintenant utiliser à nouveau le modèle binomial afin d'établir une méthode d'évaluation d'une option de vente ('Put Option'). Soit P la valeur actuelle d'une option de vente, une période avant la date d'expiration. On a

$$P \begin{cases} P_u = \max[0, K - u(1-\delta)^{\nu} S] \\ P_d = \max[0, K - d(1-\delta)^{\nu} S] \end{cases}$$

Nous pouvons, encore une fois, créer un portefeuille couvert avec AS en actions et B en obligations qui aura, en fin de période, la même valeur que l'option de vente. En procédant exactement comme dans la section 3, on montre que

$$P = \frac{[pP_u + (1-p)P_d]}{\widehat{r}},$$

si cette valeur est supérieure à $K - S$, et $P = K - S$ sinon. Comme précédemment, $p = \frac{(\widehat{r}-d)}{u-d}$ et $A = \frac{(P_u - P_d)}{(u-d)S}$. Évidemment, puisque $P_u \leq P_d$, alors $A \leq 0$. C'est-à-dire que si l'option est surévaluée, le portefeuille couvert comportera une position à découvert sur l'action ('short position').

Nous espérons qu'avec les options de vente, les complications causées par un exercice optimal avant la date d'expiration seront évitées. Malheureusement, cela n'est pas le cas. En fait, la situation est pire. Il existe maintenant des situations où personne ne voudra maintenir l'option de vente pour une période additionnelle.

Illustrons cela. Supposons que $K > u(1-\delta)^{\nu}S$. Puisque $u > d$, alors évidemment $K > d(1-\delta)^{\nu}S$. Dans ce cas, $P_u = K - u(1-\delta)^{\nu}S$ et $P_d = K - d(1-\delta)^{\nu}S$. Donc, puisque $\left(\frac{u}{\widehat{r}}\right)p + \left(\frac{d}{\widehat{r}}\right)(1-p) = 1$, alors

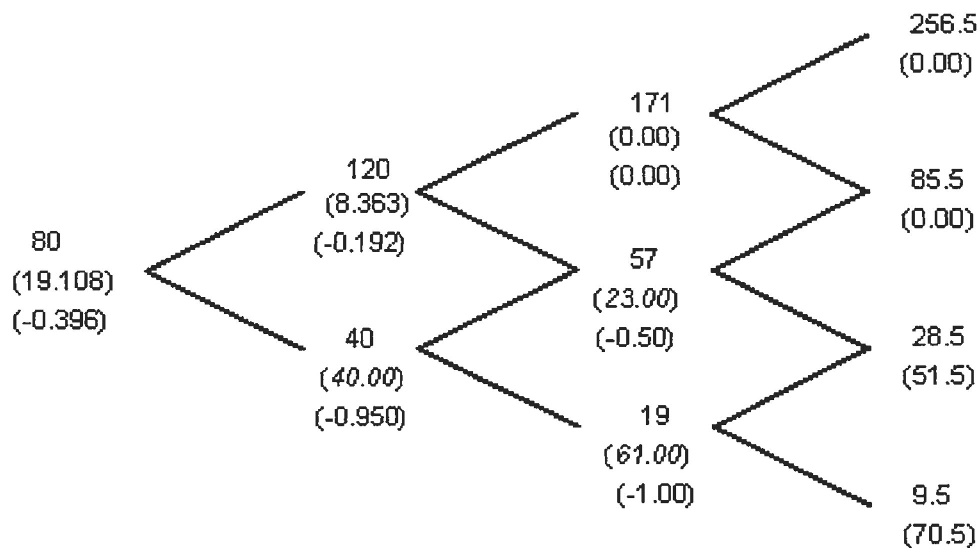
$$\frac{[pP_u + (1-p)P_d]}{\widehat{r}} = \left(\frac{K}{\widehat{r}}\right) - (1-\delta)^{\nu}S.$$

S'il n'y a pas de dividendes (c'est-à-dire si $\nu = 0$), alors cette valeur est certainement inférieure à $K - S$. En fait, même si $\nu = 1$, elle sera inférieure à $K - S$ si le prix de l'action est assez bas.

Il existe donc un prix critique, $\widehat{S}$, tel que si $S < \widehat{S}$, l'option de vente doit être exercée immédiatement. Parallèlement au cas pour l'option d'achat, $\widehat{S}$ est la valeur de S pour laquelle $\frac{[pP_u+(1-p)P_d]}{\widehat{r}} = K - S$. On remarque que, si tous les autres paramètres restent constants, $\widehat{S}$ augmente à mesure que le rendement en dividendes baisse, le taux d'intérêt monte, et le prix d'exercice monte. L'exercice de l'option de vente avant la date d'expiration devient plus probable lorsque l'option est bien dans le cours et le taux d'intérêt est élevé. L'effet des dividendes non payés réduit les avantages d'un exercice prématuré, car l'acheteur de l'option de vente ne voudra pas sacrifier les baisses du prix de l'action aux dates d'émission de dividendes.

Comme pour l'option d'achat, nous pouvons étendre cet argument pour évaluer le prix d'une option de vente avec un nombre arbitraire de périodes avant la date d'expiration. Avec très peu de modifications, nous pouvons évaluer des options de vente en utilisant les mêmes techniques numériques qu'avec les options d'achat. En fait il suffit d'inverser $S - K$ (par $K - S$).

Le diagramme suivant illustre les prix de l'action, les prix de l'option de vente, et les valeurs de A obtenus de cette manière en utilisant l'exemple traité à la section 4. Nous avions $S = 80$, $K = 80$, $n = 3$, $u = 1.5$, $d = 0.5$, et $\widehat{r} = 1.1$. Afin d'inclure les dividendes dans notre exemple, supposons qu'un dividende de cinq pourcent ($\delta = 0.05$) est payé à la fin de la dernière période avant la date d'expiration. Donc, $(1-\delta)^{\overline{\nu}(n,0)} = 0.95$, $(1-\delta)^{\overline{\nu}(n,1)} = 0.95$, et $(1-\delta)^{\overline{\nu}(n,2)} = 1.0$. Lorsque le prix de l'option de vente est en italique, cela indique que l'exercice à ce moment est optimal.



7 Conclusion

Il est maintenant clair que lorsque le prix d'une action fluctue selon un processus binomial, ou selon un cas limite de celui-ci, les options peuvent être évaluées par des considérations d'arbitrage exclusivement. En fait nous aurions pu compliquer notre modèle binomial considérablement tout en conservant cette propriété.

Tel que constaté, les probabilités d'une fluctuation vers le haut ou vers le bas n'ont aucunement affecté la formule d'évaluation. Le résultat aurait donc été le même si q dépendait du prix de l'action ou d'une variable aléatoire quelconque. De plus, u et d auraient pu varier en fonction du temps. Plus particulièrement, le pourcentage de variation du prix de l'action aurait pu dépendre du prix de l'action en début de période ou d'un prix antérieur. Toutefois, si les variations du prix de l'action dépendaient d'une variable aléatoire qui n'est pas parfaitement corrélée au prix de l'action, notre modèle ne tiendrait plus. Si, suite à cela, une situation d'arbitrage était toujours possible, notre portefeuille de couverture comporterait des actifs additionnels.

Puisque tous les modèles d'évaluation de produits dérivés peuvent être déduits par des formes limites d'un processus discret binomial, il semble qu'un modèle où à deux états pour les mouvements du prix de l'action est nécessaire et suffisant pour dériver des formules d'évaluation d'options basées uniquement sur des considérations d'arbitrage. Afin d'évaluer une option par des méthodes d'arbitrage, il doit exister un portefeuille formé d'autres actifs qui reproduit exactement tous les états du montant perçu par une option exercée de manière optimale. Voici une proposition. Supposons que, comme c'est le cas dans cet article, le marché est parfait, les variations du taux d'intérêt ne sont jamais aléatoires, et les variations du prix de l'action sont toujours aléatoires. Dans un modèle à temps discrets, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une option (quelque soient sa maturité et son prix d'exercice) soit évaluée par arbitrage en utilisant uniquement l'action et le bond dans le portefeuille, est qu'à chaque période,

1. le prix de l'action puisse varier de son prix initial (en début de période) à deux (et seulement deux) valeurs en fin de période, et

2. les dividendes et les grandeurs de chacune des deux variations soient des fonctions connues qui dépendent d'au plus (i) les prix actuel et antérieurs de l'action, (ii) des variables aléatoires dont les variations sont parfaitement corrélées aux variations du prix de l'action, et (iii) le temps.

La condition de suffisance est triviale à la lumière de cet article. La nécessité est déduite de la discussion à la fin du chapitre 3.

Ceci conclut cet article. Le processus binomial est l'élément central des méthodes d'évaluation de produits dérivés par arbitrage. Il est rassurant de trouver une approche si simple au centre d'une théorie si puissante qui requiert généralement l'utilisation d'outils mathématiques complexes.

8 Appendice I: Résolution du système

Nous voulons montrer ici qu'en résolvant le système

$$\begin{aligned} 25y - 1.25z &= 0 \\ -50x + 100y - 1.25z &= 0 \\ Cx - 50y + z &= 0 \end{aligned}$$

on obtient que $C = 20$\$, et (x, y, z) appartient à l'espace engendré par $(3, 2, 40)$.

Remarquons d'abord que $25y - 1.25z = 0 \Rightarrow z = 20y$. En remplaçant z par $20y$ dans la deuxième équation on obtient

$$-50x + 100y - 1.25(20y) = 0,$$

ce qui implique que

$$y = \frac{2x}{3}.$$

Nous avons donc

$$z = 20y = 20\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{40x}{3}$$

et

$$y = \frac{2x}{3}.$$

En remplaçant dans la troisième équation, on obtient

$$Cx - 50\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{40x}{3} = 0,$$

et donc

$$Cx - 20x = 0.$$

On conclut donc que $x = 0$ ou $C = 20$. Or, si $x = 0$, y et z sont également nuls (qui est une solution triviale). Il est donc nécessaire que $C = 20$.

Dans ce cas,

$$x = x \ , \ y = \frac{2x}{3} \text{ et } \ z = \frac{40x}{3}.$$

La solution est donc l'espace $\left(x, \frac{2x}{3}, \frac{40x}{3}\right)$. En d'autres mots, c'est l'espace engendré par $(3, 2, 40)$.

Résolvons l'équation quadratique par rapport à q_n.

$$\begin{array}{rcl} a &=& 4\sigma^2 tn + (n\log\alpha - 2\mu t)^2 \\ b &=& -4\sigma^2 tn - (n\log\alpha - 2\mu t)^2 \\ c &=& \sigma^2 tn \\ \Delta &=& \left[-4\sigma^2 tn - (n\log\alpha - 2\mu t)^2\right]^2 - 4\left[4\sigma^2 tn + (n\log\alpha - 2\mu t)^2\right]\sigma^2 tn \\ &=& [4\sigma^2 tn + (n\log\alpha - 2\mu t)^2]\left[\left[4\sigma^2 tn + (n\log\alpha - 2\mu t)^2\right] - 4\sigma^2 tn\right] \\ &=& [4\sigma^2 tn + (n\log\alpha - 2\mu t)^2](n\log\alpha - 2\mu t)^2 \end{array}$$

donc,

$$q_n = \frac{4\sigma^2 tn + (n\log\alpha - 2\mu t)^2 \pm \sqrt{\left[4\sigma^2 tn + (n\log\alpha - 2\mu t)^2\right](n\log\alpha - 2\mu t)^2}}{2\left[4\sigma^2 tn + (n\log\alpha - 2\mu t)^2\right]}$$

ou bien,

$$q_n = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\frac{|n\log\alpha - 2\mu t|}{\sqrt{\left[4\sigma^2 tn + (n\log\alpha - 2\mu t)^2\right]}}. \tag{9.3}$$

Il y a deux cas à considérer ici,

Cas1[9] : Si $0 < \alpha \leq e^{\frac{2\mu t}{n}}$
Dans ce cas, l'équation devient

$$q_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{2\mu t - n\log\alpha}{\sqrt{\left[4\sigma^2 tn + (n\log\alpha - 2\mu t)^2\right]}} \quad \text{ou} \quad q_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{2\mu t - n\log\alpha}{\sqrt{\left[4\sigma^2 tn + (n\log\alpha - 2\mu t)^2\right]}}$$

Cas2[10] : Si $\alpha > e^{\frac{2\mu t}{n}}$
Dans ce cas, l'équation devient

$$q_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{n\log\alpha - 2\mu t}{\sqrt{\left[4\sigma^2 tn + (n\log\alpha - 2\mu t)^2\right]}} \quad \text{ou} \quad q_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{n\log\alpha - 2\mu t}{\sqrt{\left[4\sigma^2 tn + (n\log\alpha - 2\mu t)^2\right]}}$$

Calculons maintenant u_n et d_n pour chacun des cas.

On sait que

$$\log d_n = \frac{\mu t - nq_n\log\alpha}{n(1-2q_n)}.$$

[9] En prenant la limite, ceci revient à dire $0 < \alpha \leq 1$.
[10] En prenant la limite, ceci revient à dire $\alpha > 1$.

En remplaçant q_n par l'expression équivalente déduite en (9.3), on obtient,

$$\log d_n = \frac{\mu t - n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{|n \log \alpha - 2\mu t|}{\sqrt{\left[4\sigma^2 tn + (n \log \alpha - 2\mu t)^2\right]}}\right)\log \alpha}{n\left(1 - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{|n \log \alpha - 2\mu t|}{\sqrt{\left[4\sigma^2 tn + (n \log \alpha - 2\mu t)^2\right]}}\right)\right)}$$

ou

$$\log d_n = \frac{\mu t - n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{|n \log \alpha - 2\mu t|}{\sqrt{\left[4\sigma^2 tn + (n \log \alpha - 2\mu t)^2\right]}}\right)\log \alpha}{n\left(1 - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{|n \log \alpha - 2\mu t|}{\sqrt{\left[4\sigma^2 tn + (n \log \alpha - 2\mu t)^2\right]}}\right)\right)}.$$

Afin de faciliter l'écriture, posons $\lambda = \sqrt{\left[4\sigma^2 tn + (n \log \alpha - 2\mu t)^2\right]}$.

On a alors,

$$\log d_n = \frac{\mu t - n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{|n \log \alpha - 2\mu t|}{\lambda}\right)\log \alpha}{n\left(1 - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{|n \log \alpha - 2\mu t|}{\lambda}\right)\right)} \quad \text{ou} \quad \log d_n = \frac{\mu t - n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{|n \log \alpha - 2\mu t|}{\lambda}\right)\log \alpha}{n\left(1 - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{|n \log \alpha - 2\mu t|}{\lambda}\right)\right)}$$

qui se simplifie à

$$\log d_n = \frac{\lambda(2\mu t - n \log \alpha)}{-2n|n \log \alpha - 2\mu t|} + \frac{\log \alpha}{2} \quad \text{ou} \quad \log d_n = \frac{\lambda(2\mu t - n \log \alpha)}{2n|n \log \alpha - 2\mu t|} + \frac{\log \alpha}{2}$$

Calculons maintenant d_n dans chacun des deux cas.

<u>**Cas1**</u>: Si $0 < \alpha \leq e^{\frac{2\mu t}{n}}$, alors

$$\log d_n = \frac{\lambda(2\mu t - n \log \alpha)}{-2n(2\mu t - n \log \alpha)} + \frac{\log \alpha}{2} \quad \text{ou} \quad \log d_n = \frac{\lambda(2\mu t - n \log \alpha)}{2n(2\mu t - n \log \alpha)} + \frac{\log \alpha}{2}$$

et donc,

$$\log d_n = \frac{\log \alpha}{2} - \frac{\lambda}{2n} \quad \text{ou} \quad \log d_n = \frac{\log \alpha}{2} + \frac{\lambda}{2n}$$

ce qui donne

$$\log d_n = \frac{\log \alpha}{2} - \frac{\sqrt{\left[4\sigma^2 tn + (n \log \alpha - 2\mu t)^2\right]}}{2n} \quad \text{ou} \quad \log d_n = \frac{\log \alpha}{2} + \frac{\sqrt{\left[4\sigma^2 tn + (n \log \alpha - 2\mu t)^2\right]}}{2n}$$

en remplaçant λ par sa valeur.

Cas 2: Si $\alpha > e^{\frac{2\mu t}{n}}$, alors

$$\log d_n = \frac{\lambda(2\mu t - n\log\alpha)}{-2n(n\log\alpha - 2\mu t)} + \frac{\log\alpha}{2} \quad \text{ou} \quad \log d_n = \frac{\lambda(2\mu t - n\log\alpha)}{2n(n\log\alpha - 2\mu t)} + \frac{\log\alpha}{2}$$

et donc,

$$\log d_n = \frac{\log\alpha}{2} + \frac{\lambda}{2n} \quad \text{ou} \quad \log d_n = \frac{\log\alpha}{2} - \frac{\lambda}{2n}$$

ce qui donne

$$\log d_n = \frac{\log\alpha}{2} + \frac{\sqrt{\left[4\sigma^2 tn + (n\log\alpha - 2\mu t)^2\right]}}{2n} \quad \text{ou} \quad \log d_n = \frac{\log\alpha}{2} - \frac{\sqrt{\left[4\sigma^2 tn + (n\log\alpha - 2\mu t)^2\right]}}{2n}$$

en remplaçant λ par sa valeur.

Puisque $u_n \cdot d_n = \alpha$, et $u > d$, il est nécessaire que $\log d_n = \frac{\log\alpha}{2} - \frac{\sqrt{\left[4\sigma^2 tn + (n\log\alpha - 2\mu t)^2\right]}}{2n}$. Car, $u_n \cdot d_n = \alpha \Rightarrow \log u_n = \log\alpha - \log d_n$, et si $\log d_n = \frac{\log\alpha}{2} + \frac{\sqrt{\left[4\sigma^2 tn + (n\log\alpha - 2\mu t)^2\right]}}{2n}$, on aurait

$$\log u_n = \log\alpha - \log d_n = \log\alpha - \left(\frac{\log\alpha}{2} + \frac{\sqrt{\left[4\sigma^2 tn + (n\log\alpha - 2\mu t)^2\right]}}{2n}\right),$$

qui est égal à

$$\frac{\log\alpha}{2} - \frac{\sqrt{\left[4\sigma^2 tn + (n\log\alpha - 2\mu t)^2\right]}}{2n},$$

qui est inférieur à $\log d_n$, ce qui est en contradiction avec le fait que $u_n > d_n$.

Il est donc nécessaire que

$$\log d_n = \frac{\log\alpha}{2} - \frac{\sqrt{\left[4\sigma^2 tn + (n\log\alpha - 2\mu t)^2\right]}}{2n}$$

Cela implique que

$$d_n = e^{\frac{\log\alpha}{2} - \frac{\sqrt{\left[4\sigma^2 tn + (n\log\alpha - 2\mu t)^2\right]}}{2n}}, \tag{9.4}$$

et donc,

$$u_n = e^{\frac{\log \alpha}{2} + \frac{\sqrt{[4\sigma^2 tn + (n \log \alpha - 2\mu t)^2]}}{2n}}. \tag{9.5}$$

Donc, en résumé, nous avons

$$u_n = e^{\frac{\log \alpha}{2} + \frac{\sqrt{[4\sigma^2 tn + (n \log \alpha - 2\mu t)^2]}}{2n}}, \qquad d_n = e^{\frac{\log \alpha}{2} - \frac{\sqrt{[4\sigma^2 tn + (n \log \alpha - 2\mu t)^2]}}{2n}},$$

et

$$q_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{|n \log \alpha - 2\mu t|}{\sqrt{[4\sigma^2 tn + (n \log \alpha - 2\mu t)^2]}}.$$

10 Bibliographie

[1] Bachelier L., Théorie de la Spéculation, Annales Scientifiques de L'École Normale Supérieure, 3e Série, 17 (1900), 21-86.

[2] Bauer H., 1978, Probability Theory and Elements of Measure Theory, Academic Press Inc.

[3] Baxter M. and AJ.O. Rennie, 1996, Financial Calculus: An introduction to derivative pricing, Cambridge University Press.

[4] Billingsley, P., 1979, Probability and Measure, John Wiley & Sons Inc.

[5] Black F, and M. Scholes, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy, 81-637, 1973.

[6] Brennan M.J. and E.S. Schwartz, The Valuation of American Put Options, Journal of Finance 32, (1977), 449-462.

[7] Castelli C., The Theory of Options in Stocks and Shares, F.C. Mathison & Sons, London 1877.

[8] Cox J.C. and S.A. Ross, The Pricing of Options for Jump Processes, an unpublished working paper 2-75, University of Pennsylvania, (April 1975).

[9] Cox, J.C, S.A. Ross and M. Rubinstein, 1979, Option pricing: A simplified approach, Journal of Financial Economics 7, 229-263.

[10] DeMark T., 1999, DeMark on Daytrading Options, McGraw-Hill.

[11] Elliot R.J. and P.E. Kopp, 1999, Mathematics of Financial Markets, Springer.

[12] Grimmet G.R. and D.R. Stirzaker, 1982, Probability and Random Processes, Clarendon Press, Oxford.

[13] Kellison S.G., 1991, The Theory of Interest, Irwin.

[14] Merton R.C., Theory of Rational Option Pricing, Bell Journal of Economics and Management Science 4-141, 1973.

[15] O'Brien T. and M.J.P. Selby, Option Pricing Theory and Asset Expectations: A Review and Discussion in Tribute to James Boness, Financial Review, November 1986, 399-418.

[16] Sharpe W.F., Investments. (Prentice Hall, 1978).